Déf. Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle] A ; +∞ [contient tous les $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proche de a
On dit que $f(x)$ tend vers +∞ quand x tend vers a et on écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

De même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.

Ex. f définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Soit A un réel positif ; $\frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A}$ (fonction inverse décroissante sur $]0\,;\,+\infty\,[$)

$\Leftrightarrow\ x < \sqrt{\frac{1}{A}}$ (fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$)

$soit\ x < \frac{1}{\sqrt{A}}$ donc l'intervalle] A ; +∞ [contient tous les $f(x)$ pour $x < \frac{1}{\sqrt{A}}$

soit pour x de plus en plus proche de 0 donc

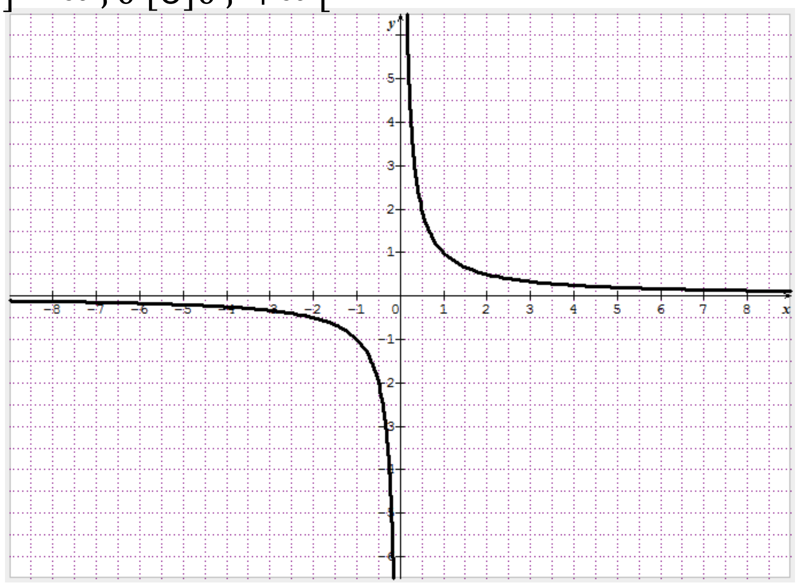
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Interprétation graphique

Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que dans un repère, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe C_f.

Limite à droite, limite à gauche

Ex. fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty\,;0\,[\cup]0\,;\,+\infty\,[$



Graphiquement, on observe que, lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (c'est-à-dire $x > 0$), $f(x)$ tend vers +∞.

$on\ écrit :\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

On parle de limite à droite de 0.

Graphiquement, on observe que lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures (c'est-à-dire $x < 0$), $f(x)$ tend vers -∞.

$on\ écrit :\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

Il s'agit de la limite à gauche de 0.

Remarque :

- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ alors f n'admet pas de limite en a

La fonction inverse n'a pas de limite en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}$ se note aussi $\lim\limits_{x\to a^+}$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}$ se note aussi $\lim\limits_{x\to a^-}$

Attention, le signe + ou – n'indique pas le signe de x mais le "côté" par lequel x tend vers a.