

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{s_n}{s_{n-1}}$

c. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a. Compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

Entrée :	Saisir n Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur ... s prend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher U

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,03	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .