NOM : ________________________ Devoir de Mathématiques n°2 TS

Ex1. La population d'une ville augmente régulièrement de 2 % par an. On suppose que ce taux reste constant. On définit la suite (p_n) qui représente la population prévue en 2019+n. On note p_0 la population actuelle en 2019 de 9 000 habitants.

```
saisir « année choisie : », a
n prend la valeur a-2019
p prend la valeur 9000
Pour i allant de 1 à n
p prend la valeur p× 1,02
FinPour
Afficher p
```

1) Calculer le nombre d'habitants prévu en 2020.

$p_1 = 1{,}02 \times p_0 = 9180$; 9180 habitants en 2020

2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire la nature de la suite p_n

$p_{n+1} = 1{,}02 \times p_n$ donc la suite (p_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $p_0 = 9000$

3) Exprimer p_n en fonction de n.

$p_n = p_0 \times q^n = 9000 \times 1{,}02^n$

4) Complète l'algorithme ci-contre, en langage courant qui après saisie de l'année notée a, renvoie le nombre prévu d'habitants noté p.

Ex2. Déterminer les limites des suites en justifiant les réponses :

$u_n = 0{,}005 \times 1{,}001^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}001^n = +\infty$ car du type q^n avec $q = 1{,}001 > 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}005 \times 1{,}001^n = +\infty$

$v_n = \frac{n+5}{4n+1}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+5}{4n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(1+\frac{5}{n})}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(1+\frac{5}{n})}{\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{4}$$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{5}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$

$w_n = \frac{3-2n^2}{n}$ $w_n = \frac{3}{n} - \frac{2n^2}{n} = \frac{3}{n} - 2n$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$ donc par somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ (du type $0 + (-\infty) \to -\infty$)

$x_n = 10n - n^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (10n - n^2) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{10}{n} - 1\right) = -\infty$

$(+\infty \times (-1) \to -\infty$) car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{10}{n} - 1\right) = -1$

Ex3. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et par la relation de récurrence $w_{n+1} = 2w_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On donne ci-contre la feuille de tableur donnant les premiers termes de la suite (w_n).

	A	B	C
1	n	w(n)	r(n)
2	0	4	1
3	1	5	2
4	2	7	4
5	3	11	8
6	4	19	16
7	5	35	32

1) Quelle formule a été écrite en B3 et recopiée vers le bas pour obtenir ces résultats ? =2*B2-3

2) Compléter les cellules B5, B6 et B7 avec les valeurs des termes de la suite (w_n).

3) On considère la suite (r_n) définie pour tout entier naturel n par $r_n = w_n - 3$

a) Compléter les cellules C2, C3, C4, C5, C6 et C7 avec les valeurs des termes de la suite (r_n).

b) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique.

$r_{n+1} = w_{n+1} - 3 = 2w_n - 3 - 3 = 2w_n - 6$

$= 2(r_n + 3) - 6 = 2r_n + 6 - 6 = 2r_n$

donc (r_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $r_0 = w_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

c) En déduire r_n en fonction de n, puis w_n en fonction de n.

$r_n = r_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n$;

$w_n = r_n + 3 = 2^n + 3$

d) La suite (r_n) converge-t-elle ? Justifier la réponse.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car du type q^n avec $q > 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n + 3 = +\infty$;

la suite (r_n) ne converge pas.

Ex4. Dans chaque cas, donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_n = 10 - \frac{3}{n}$ b) $u_n = 3 - (-1)^n$

$7 \leq 10 - \frac{3}{n} \leq 10$ $2 \leq 3 - (-1)^n \leq 4$

c) $u_n = 2n + 3$ $u_n \geq 3$; pas de majorant car

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

BONUS. **La quantité de carbone 14 présente dans un organisme baisse d'environ 0,012 % chaque année. On note n le nombre d'années écoulées depuis la mort d'un organisme et (u_n) la quantité de carbone 14 restante n années après sa mort.**
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et déduire de la période de demi-vie du carbone 14 (le nombre d'années après la mort d'un organisme à partir duquel la quantité de carbone 14 a diminué de moitié).

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{0{,}012}{100}\right) u_n = 0{,}99988 u_n$$

$u_n = u_0 \times 0{,}99988^n$; on cherche n tel que $u_0 \times 0{,}99988^n < \frac{1}{2} u_0$ soit $0{,}99988^n < 0{,}5$

Avec la calculatrice, on obtient $n = 5776$

Ex5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 4$.

1. Montrer par récurrence que $u_n = 8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

① Soit P_n la propriété : $u_n = 8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

② initialisation $u_0 = 1$ et $8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 8 - 7 = 1$
donc P_0 est vraie.

③ hérédité.
On suppose P_n vraie ; montrons que P_{n+1} est vraie,
c'est-à-dire $u_{n+1} = 8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

P_n vraie donc $u_n = 8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 4 = \frac{1}{2}\left(8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 4$$

$= 4 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4$

$= 8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

donc P_{n+1} est vraie

④ conclusion : P_0 vraie et P_n héréditaire donc par récurrence pour tout entier n on a $u_n = 8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2. La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, calculer sa limite.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car du type q^n avec $-1 < q < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(8 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 8$

(du type $8 - 7 \times 0 \to 8$)

donc la suite (u_n) converge vers 8

Ex6. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 4n$

1) Quelle valeur le programme ci-contre affiche-t-il si on saisit en entrée A=100 000 ?

n=315 ; $u_{314} = 99\,852 < 100\,000$ et $u_{315} = 100\,485 > 100000$

2) Justifier que le programme s'arrête quelle que soit la valeur de A rentrée par l'utilisateur.

```
variables : n entier ; u, A réels
traitement : demander A
             n prend la valeur 0
u prend la valeur 0
Tant que u<=A
    n prend la valeur n+1
    u prend la valeur n^2 + 4n
Fin Tant Que
sortie : Afficher la valeur de n
```

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 4n) = +\infty$ (du type $+\infty + (+\infty) \to +\infty$) donc on peut rendre le terme u_n aussi grand que l'on veut donc pour tout valeur de A, on trouvera un rang n à partir duquel les termes de la suite seront supérieur à A donc la boucle tant que avec la condition u<=A s'arrêtera.

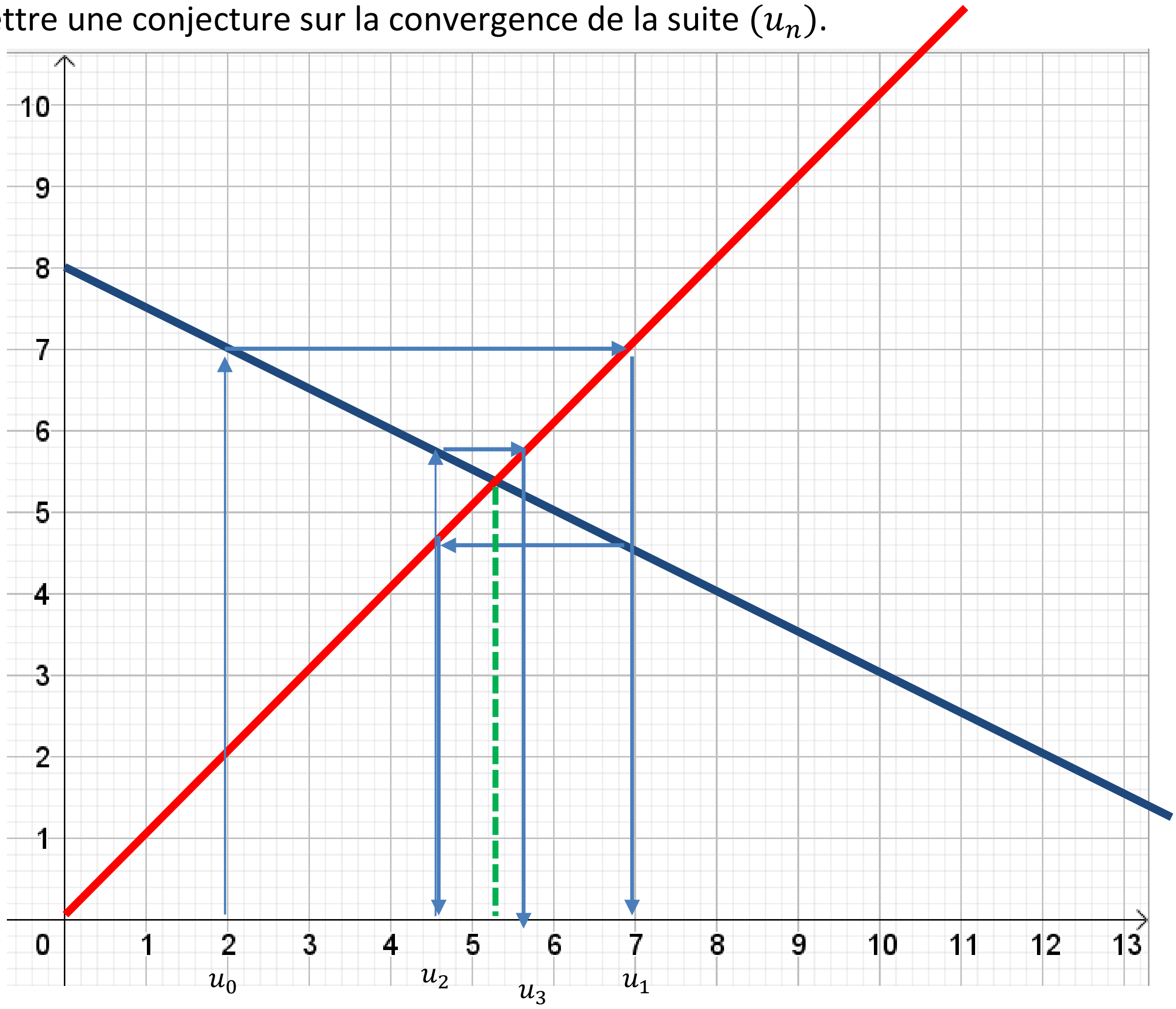
```python
A=eval(input("saisir la valeur de A :"))
n=u=0
while u<=A:
    n=n+1
    u=n**2+4*n
print(n)
```

Ex7. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-x}{2} + 8$

1) Représenter dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.

2) En utilisant le graphique précédent, représenter **sur l'axe des abscisses** les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sans les calculer.

3) Émettre une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).



Il semble que la suite (u_n) soit convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \approx 5{,}3$

ℓ vérifie : $\ell = -\frac{\ell}{2} + 8$ soit $3\frac{\ell}{2} = 8$ soit $\ell = \frac{16}{3}$