 NOM : ________________

Ex1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants.

complexe	partie réelle	partie imaginaire
$3+2i$	3	2
$-2i+4$	4	-2
$\frac{3+5i}{2}$	$\frac{3}{2}=1{,}5$	2,5
$\frac{2i-1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
$4i$	0	4
0	0	0
i^2	-1	0
i^5+i	0	2
$\frac{1}{i}=-i$	0	-1

Ex2. On considère un réel a et le nombre complexe $z=a^2+2a-3+2i(a^2-3)$

1. Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles z est un réel.

$Re(z)=a^2+2a-3$ et $Im(z)=2(a^2-3)$

z réel pour $a^2-3=0$ soit $a^2=3$ soit $a=-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}$

2. Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles z est un imaginaire pur.

z imaginaire pur pour $a^2+2a-3=0$ équation du 2nd degré

$\Delta=2^2-4\times 1\times(-3)=16$ $a_1=\frac{-2-4}{2}=-3$ et $a_2=\frac{-2+4}{2}=1$

Ex3. Écrire le conjugué de z sous forme algébrique.

a) $z=i(2+2i)-3i(1+2i)$

$z=2i-2-3i-6i^2=4-i$

$\bar{z}=4+i$

b) $z=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$\bar{z}=-2i$

c) $z=\frac{1}{2i}=\frac{-2i}{4}=-0{,}5i$

$\bar{z}=0{,}5i$

d) $z=\frac{1-i}{2+i}$

$z=\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i-2i+i^2}{2^2+1^2}=\frac{1-3i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

$\bar{z}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i=0{,}2+0{,}6i$

Ex4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue z.
On donnera les réponses sous forme algébrique.

a) $3z - 2i + 4 = i - 2z$

$5z = i + 2i - 4 = -4 + 3i$

$z = \frac{-4+3i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i = -0{,}8 + 0{,}6i$

b) $2z - 3i\bar{z} = -5 - i$ (on pourra poser $z = x + iy$)

$2(x + iy) - 3i(x - iy) = 8 - 7i$

$2x + i2y - 3xi + 3i^2y = 8 - 7i$

$2x - 3y + i(-3x + 2y) = 8 - 7i$

$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \text{ (1)} \\ -3x + 2y = -7 \text{ (2)} \end{cases}$ $\quad$ (1) $\times 3$, (2) $\times 2$ $\quad \begin{cases} 6x - 9y = 24 \\ -6x + 4y = -14 \end{cases}$

par addition $-5y = 10$ soit $y = \frac{10}{-5} = -2$

(1) $2x - 3 \times (-2) = 8$ soit $2x + 6 = 8$ soit $2x = 2$ soit $x = 1$

$z = 1 - 2i$

Ex5. VRAI/FAUX à justifier

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{2 + \imath z} = 2 - iz$

$\overline{2 + \imath z} = \bar{2} - \overline{\imath z} = 2 - \bar{\imath} \times \bar{z} = 2 + i\bar{z}$ faux

2) $\frac{2+i}{3-i} - \frac{2-i}{3-i}$ est un imaginaire pur.

$\frac{2+i}{3-i} - \frac{2-i}{3-i} = \frac{2i}{3-i} = \frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6i-2}{10} = -0{,}2 + 0{,}6i$ FAUX

3) Pour tout entier naturel n, $(4 + 2i)^n + (4 - 2i)^n$ est un réel.

$z^n + \bar{z}^n = z^n + \overline{(z^n)} = Z + \bar{Z} = 2Re(Z)$ vrai

4) $z = (2 - i) + 3i(i - 2)$ est égale à -1.

$z = (2 - i) + 3i(i - 2) = 2 - i - 3 - 6i = -1 - 7i$ FAUX

5) Le produit de $1 + i$ par $3 + 3i$ est égal à $6i$.

$(1 + i) \times (3 + 3i) = 3 + 3i + 3i + 3i^2 = 6i$ VRAI

BONUS : $(-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$

$(-1 + i)^4 = (-2i)^2 = -4$

$(-1 + i)^5 = (-1 + i)^4 \times (-1 + i)$

$= -4(-1 + i) = 4 - 4i$