I Ensemble des nombres complexes

1) Écriture algébrique d'un nombre complexe

Définition : il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé ensemble des nombres complexes tel que :
1. $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$
3. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont des réels.

Cette écriture est appelée forme algébrique de z.

Définition. Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec a, b réels
a est la partie réelle de z et b est la partie imaginaire de z
On note $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$

$Re(z)$ et $Im(z)$ sont des réels.

Exemple. $Re(3i + 1) = 1$; $Im(-5 - i) = -1$

Remarque : tout complexe du type $z = bi$ est appelé imaginaire pur.

• $Im(z) = 0 \Leftrightarrow z$ est un réel
• $Re(z) = 0 \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur

2) Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux
$\Leftrightarrow$ les parties réelles sont égales et les parties imaginaires sont égales.

$z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Conséquence : $a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

II Conjugué d'un nombre complexe

Définition. Soit z un nombre complexe dont l'écriture algébrique est $z = a + bi$
On appelle conjugué du nombre complexe z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - bi$

Le conjugué de $z = 5 - 3i$ est $\bar{z} = 5 + 3i$
Le conjugué de $z' = 8i$ est $\overline{z'} = -8i$

Opérations sur les conjugués

- Pour tout complexe z, $\bar{\bar{z}} = z$ (conjugué du conjugué)

- Somme, produit, inverse, quotient

Pour tous complexes z et z',

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'} \text{ et } \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$$

- Pour tout complexe z, et tout entier naturel n non nul : $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ $\qquad$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

$$z + \bar{z} = 2Re(z) \qquad\qquad z - \bar{z} = 2i\, Im(z)$$

Autres propriétés

- Si $z = a + bi$, alors $\boldsymbol{z \times \bar{z} = a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$

- Si $z = a + bi$, alors **z est réel** $\Leftrightarrow$ b=0 $\Leftrightarrow \bar{z} = z$

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k$$

$$= \binom{3}{0} a^3 \times b^0 + \binom{3}{1} a^2 \times b^1 + \binom{3}{2} a^1 \times b^2 + \binom{3}{3} a^0 \times b^3$$

$$= \boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Remarque : la formule peut s'écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les coefficients binomiaux ;

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avec $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$

Triangle de Pascal et coefficients binomiaux

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
$\boxed{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1}$

$(x+3)^5$
$= 1 \times x^5 \times 3^0 + 5 \times x^4 \times 3^1 + 10 \times x^3 \times 3^2 + 10 \times x^2 \times 3^3 + 5 \times x^1 \times x \times 3^4 + 1 \times x^0 \times 3^5$
$= \boldsymbol{x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243}$

```
developper((x+3)^5)
```
$x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

III Équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$
L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$
- une solution réelle si $\Delta = 0$: $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- deux solutions réelles si $\Delta > 0$: $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 < 0$$

donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées

$$\boldsymbol{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4-i\sqrt{16}}{2} = 2 - 2i$$

$\boldsymbol{z_2} = \overline{z_1} = 2 + 2i$ $\qquad S = \{\, 2-2i \,;\, 2+2i \,\}$

```
csolve(z^2-4z+8
```
$\text{list}[2+2i, 2-2i]$

Remarque : lorsque le discriminant est négatif, il suffit de déterminer l'une des solutions ; l'autre s'obtient en prenant le conjugué de la première.

Le discriminant de l'équation $(E): z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = -3$.

Les solutions de (E) sont les complexes conugués : $z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

IV Factorisation d'un polynôme du second degré.

Propriété : Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$
On considère le polynôme du second degré P défini par, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$P(z) = az^2 + bz + c$
On note z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$
alors pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

Exemple. Soit le polynôme P défini par $P(z) = z^2 - 2z + 5$
Le discriminant de l'équation $P(z) = 0$ est $\Delta = -16$
Les solutions de cette équation sont les complexes conjugués :
$z_1 = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 + 2i$
On peut factoriser $P(z)$ sous la forme :
$P(z) = (z - (-1 - 2i))(z - (-1 + 2i) = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$

V Factorisation de polynômes

1. Fonction polynôme de degré n à coefficients réels

Définition.

● Soient n un entier naturel et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels avec $a_n \neq 0$
Un polynôme P de degré n est une expression s'écrivant sous la forme :
$$P(z) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

● Le polynôme nul est le polynôme P tel que pour tout complexe z, $P(z) = 0$; un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

● On appelle racine d'un polynôme tout complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Exemple
● $P(z) = 5$ est un polynôme constant ; son degré est 0.
● $Q(z) = 6z^3 + 1$ est un polynôme de degré 3.

2. Factorisation par $z - a$

Définition. On dit qu'un polynôme est factorisable par $z - a$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$

Exemple.
$P(z) = z^2 - 9$ est factorisable par $z - 3$ car $P(z) = (z - 3)(z + 3)$

Propriété.
Soit a un nombre complexe.
Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n,
$z^n - a^n$ est factorisable par $z - a$

$$\begin{aligned} z^n - a^n &= (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}) \\ &= (z - a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right) \end{aligned}$$

Propriété. Le polynôme P est factorisable par $z - a$ si et seulement si a est une racine de P.

3. Degré et racines d'un polynôme

Propriété. Un polynôme non nul P, de degré n, admet au plus n racines distinctes.