1. On note x et y les deux nombres recherchés ; ils vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 & ① \\ x \times y = 40 & ② \end{cases}$$

de ① on peut écrire : $y = 10 - x$

L'équation ② devient : $x \times (10 - x) = 40$

2. $x \times (10 - x) = 40$

$\Leftrightarrow 10x - x^2 = 40$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 40 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (-40) = -60 < 0$

Δ négatif donc pas de solution réel pour l'équation

3. $x \times (10 - x) = \left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(10 - \left(5 + \sqrt{-15}\right)\right)$

$= 50 - 25 - 5\sqrt{-15} + 10\sqrt{-15} - 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15} \times \sqrt{-15}$

$= 25 + 15 = 40$

$x \times (10 - x) = \left(5 - \sqrt{-15}\right)\left(10 - \left(5 - \sqrt{-15}\right)\right)$

$= 50 - 25 + 5\sqrt{-15} - 10\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} + \sqrt{-15} \times \sqrt{-15}$

$= 25 + 15 = 40$

donc les quantités $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ vérifient bien l'équation.

4. $i^2 = -1$

a) $x^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

donc i solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$

b) $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

5. a) $x^2 = -4$ pour $2i$ et $-2i$

b) $x^2 = -2$ pour $i\sqrt{2}$ et $i\sqrt{2}$

c) $x^2 = -15 = 15i^2$ pour $i\sqrt{15}$ et $-i\sqrt{15}$

6. solutions : $5 + i\sqrt{15}$ et $5 - i\sqrt{15}$

Histoire des maths — 20 min

2 Découvrir une approche historique

On veut trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit soit égal à 40.

Cardan

Au milieu du XVI^e siècle, Cardan donne des solutions de l'équation correspondant à ce problème : $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.
Il nomme ces quantités « quantités sophistiquées ».
Plus tard, au XVII^e siècle, Descartes les nommera « quantités imaginaires ».
Au XVIII^e siècle, Euler introduit une nouvelle notation : il pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.

1. Montrer que le problème peut se traduire par l'équation $x \times (10 - x) = 40$.

2. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

3. En admettant que les quantités $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ de Cardan existent, montrer qu'elles vérifient bien l'équation. Pour cette question, on généralise la règle suivante à tous les nombres réels : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

4. On pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.
a) En déduire que i est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.
b) Déterminer la valeur de i^4.

5. En utilisant le nombre i, déterminer un nombre qui :
a) élevé au carré est égal à –4. **b)** élevé au carré est égal à –2. **c)** élevé au carré est égal à –15.

6. En utilisant le résultat de la question **5. c)**, réécrire les solutions proposées par Cardan en utilisant le nombre i.