137 Fonctions dans $\mathbb{C}$

On considère la fonction f définie pour tout nombre complexe z différent de -1 par $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

1. Déterminer la forme algébrique des images par f de
a) 1
b) 2i

2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents de $1 + i$ par f.

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

1.a) $f(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$

b) $f(2i) = \frac{2i-1}{2i+1} = \frac{(-1+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$= \frac{-1+2i+2i-4i^2}{1^2+2^2}$

$= \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = 0{,}6 + 0{,}8i$

2. On cherche z tel que $f(z) = 1 + i$

soit $\frac{z-1}{z+1} = 1 + i$

$\Leftrightarrow z - 1 = (1+i)(z+1)$

$\Leftrightarrow z - 1 = z + 1 + iz + i$

$\Leftrightarrow iz = -2 - i$

$\Leftrightarrow z = \frac{-2-i}{i} = \frac{(-2-i)(-i)}{1} = 2i - 1 = -1 + 2i$

3. $f(z) = z \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z$

$\Leftrightarrow z - 1 = z(z+1)$

$\Leftrightarrow z - 1 = z^2 + z$

$\Leftrightarrow z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i$ deux solutions : i et $-i$

149 Calculer dans $\mathbb{C}$

On considère les deux nombres complexes $z = 4 + 7i$ et $z' = -2 + 5i$.

Déterminer la forme algébrique de :
a) $z + z'$
b) $z - z'$
c) $z \times z'$
d) z^2
e) $\frac{1}{z'}$
f) $\frac{z}{z'}$

Méthode 3 Méthode 4 p. 17

a) $z + z' = 2 + 12i$

b) $z - z' = 4 + 7i - (-2 + 5i)$

$= 6 + 2i$

c) $z \times z' = (4+7i)(-2+5i)$

$= -8 + 20i - 14i - 35$

$= -43 + 6i$

d) $z^2 = (4+7i)^2$

$= 16 + 56i - 49$

$= -33 + 56i$

e) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{-2+5i} = \frac{-2-5i}{(-2)^2+5^2} = -\frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

f) $\frac{z}{z'} = \frac{(4+7i)}{-2+5i} = \frac{(4+7i)(-2-5i)}{29} = \frac{-8-20i-14i+35}{29} = \frac{27}{29} - \frac{34}{29}i$