mathsbdp.fr DM2a p30_77_correction

77 1. Développer et simplifier $(x+1)^4-(x-1)^4$.
2. En déduire la valeur exacte de $1\,001^4-999^4$ sans calculatrice.

1. $(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

$(x-1)^4 = x^4+4\times x^3\times(-1)+6\times x^2\times(-1)^2+4\times x\times(-1)^3+(-1)^4$

$= x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

$(x+1)^4-(x-1)^4$

$= x^4+4x^3+6x^2+4x+1-(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)$

$= 8x^3+8x$

```
developper((x+1)^4-(x-1)^4)
```

$8x^3+8x$

2. $1001^4-999^4=(1000+1)^4-(1000-1)^4$

$= 8\times 1000^3+8\times 1000$

$= 8\,000\,008\,000$

```
1001^4-999^4
```

$8000008000 = 8000008000$

p30_78_correction

78 Soit z le nombre complexe tel que $z=(1+ib)^3$.
1. Pour quelle(s) valeur(s) de b le nombre z est-il réel ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de b le nombre z est-il imaginaire pur ?

1. z réel $\Leftrightarrow Im(z)=0$

$z=(1+ib)^3=1^3+3\times 1^2\times ib+3\times 1\times(ib)^2+(ib)^3$

$=1+i3b-3b^2-ib^3$

$=1-3b^2+i(3b-b^3)$

z réel $\Leftrightarrow Im(z) = 0$

$\Leftrightarrow 3b - b^3 = 0$

$\Leftrightarrow b(3 - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow b = 0 \; ou \; b^2 = 3$

$\Leftrightarrow b = 0 \; ou \; b = \sqrt{3} \; ou \; b = -\sqrt{3}$

Les valeurs de b pour lesquelles z est un réel sont :

$0 \; ; \; -\sqrt{3} \; ; \; \sqrt{3}$

2. z imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3b^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3b^2 = 1$

$\Leftrightarrow \; b^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \; ou \; b = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Les valeurs de b pour lesquelles z est un imaginaire pur sont : $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$

---

115 Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 5 \end{cases}$

115p32

$\begin{cases} z_2 = 3 - z_1 \; (1) \\ z_1 \times z_2 = 5 \; (2) \end{cases}$; (2) devient $z_1 \times (3 - z_1) = 5 \Leftrightarrow 3z_1 - z_1^2 = 5 \;\; \Leftrightarrow z_1^2 + 3z_1 - 5 = 0$

z_1 et z_2, par raison de symétrie sont solutions de l'équation du 2nd degré :

$$z^2 + 3z - 5 = 0$$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-5) = -11 < 0$ donc deux solutions complexes conjuguées

$z_a = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i$

$z_b = \overline{z_1} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i$

Les solutions du système sont les couples

$\{(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i \; ; -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i) \; ; (-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i \; ; -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i \;)$