mathsbdp.fr p32_119_correction

1.

119 On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.

Déterminer l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

$f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2 \times (-1 + i\sqrt{3}) + 9$

$= 1 - i2\sqrt{3} - 3 - 2 + i2\sqrt{3} + 9$

$= 5$

```
f(z):=z^2+2*z+9
```

$z \to z^2 + 2z + 9$

```
f(-1+i*sqrt(3))
```

$(-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 \approx 5.0$

2. $f(z) = 5$

$\Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = 5$

$\Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{12}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$

$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$S = \{-1 - i\sqrt{3} \,;\, -1 + i\sqrt{3}\}$

Autre méthode : on a trouvé $f(-1 + i\sqrt{3}) = 5$

donc $-1 + i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation $f(z) = 5$

La deuxième solution est donc le conjugué de $-1 + i\sqrt{3}$ car il s'agit d'une équation du 2nd degré qui a donc deux solutions complexes conjuguées, soit $-1 - i\sqrt{3}$

3. $f(z) = \lambda$

$z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (9 - \lambda)$

$= 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$

On veut deux solutions complexes conjuguées donc $\Delta < 0$ soit $4\lambda - 32 < 0$ soit $4\lambda < 32$ soit $\lambda < 8$ soit $\lambda \in]-\infty\,;\,8[$