mathsbdp.fr p32_120_correction

120 On considère l'équation

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0,$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

1. Pour $z = 1$

$1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$.

donc 1 est une solution entière de (E).

2)

$(z^2 + z - 2) \times (z^2 + z + 1)$

$= z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2$

$= z^4 + 2z^3 - z - 2$

3) D'après 2) l'équation (E) devient

$$(z^2 + z - 2) \times (z^2 + z + 1) = 0$$

$$\boxed{A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0}$$

$\iff z^2 + z - 2 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

$z_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

$z_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

deux solutions complexes conjuguées

$z'_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z'_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$S = \left\{-2 \,;\, 1 \,;\, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

csolve(x^4+2*x^3-x-2=0)

$$[1, -2, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})]$$