mathsbdp.fr p37_154_correction

154 Équation de degré 3

1. On considère l'équation suivante :

$$2x^3 - 2x^2 - 24x = 0.$$

a) Déterminer une solution évidente de l'équation.

b) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

2. On considère l'équation suivante :

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = 0.$$

a) Vérifier que -1 est solution de l'équation.

b) Déterminer une factorisation de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$.

c) En déduire toutes les solutions complexes de l'équation.

Méthode 10 p. 23

1.a) $2 \times 0^3 - 2 \times 0^2 - 24 \times 0 = 0$

donc 0 est une solution évidente de l'équation

b)On peut factoriser par $2x$

$$2x^3 - 2x^2 - 24x = 2x(x^2 - x - 12)$$

$2x^3 - 2x^2 - 24x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x^2 - x - 12) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - x - 12 = 0$

racine de $x^2 - x - 12$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 > 0$

donc deux racines réelles

$x_1 = \frac{1-7}{1} = -3$ et $x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$ $S = \{ -3 ; 0 ; 4 \}$

2.a $(-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 25 \times (-1) + 29 = 0$

donc -1 est bien une solution de l'équation

$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ se factorise par $x - (-1) = x + 1$ car -1 est une racine du polynôme

$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$

$= ax^3 + x^2(b+a) + x(c+b) + c$

donc $a = 1$

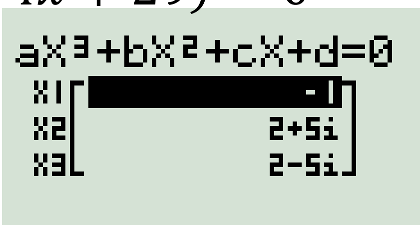
$b + a = -3$ soit $b = -4$

$c = 29$

On peut vérifier que $c + b = 29 - 4 = 25$

$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x+1)(x^2 - 4x + 29)$

c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 29) = 0$



$x^2 - 4x + 29 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 29 = -100 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{4-i10}{2} = 2 - 5i$ et $z_2 = 2 + 5i$

$S = \{-1\,;2-5i\,;2+5i\,\}$