Ex1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

a. $\begin{cases} x \equiv -3[7] \equiv 4[7] \equiv 11[7] \equiv 18[7] \\ 0 < x < 20 \end{cases}$ $S = \{4\ ;\ 11\ ;\ 18\}$

b. $\begin{cases} x + 3 \equiv -1[7] \\ 100 < x < 120 \end{cases}$ soit $x \equiv -4[7] \equiv 3[7] soit$

$x = 7k + 3\ avec\ k\ entier\ relatif$

$100 < 7k + 3 < 120$ soit $\frac{97}{7} < k < \frac{117}{7}$ soit $k \in \{14\ ; 15\ ; 16\}$

Les entiers x correspondants sont : 101 ; 108 ; 115.

c. $\begin{cases} 2x - 1 \equiv 9[3] \\ 75 < x \leq 99 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x - 1 \equiv 0[3] \\ 75 < x \leq 99 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x - 1 \equiv 9[3] \\ 75 < x \leq 99 \end{cases}$

$x \equiv \cdots (3)$	0	1	2
$2x - 1 \equiv \cdots (3)$	2	1	0

Il faut donc $x \equiv 2(3)$ soit $x = 2 + 3k$ avec $k\ entier$

$75 < x \leq 98$

$\Leftrightarrow 75 < 2 + 3k \leq 98$

$\Leftrightarrow 73 < 3k \leq 96$

$\Leftrightarrow \frac{73}{3} < k \leq 32$ donc $k \in \{25\ ; 26\ ; 27\ ; 28; 29\ ; 30\ ; 31; 32\}$

donc $x \in \{77\ ; 80\ ; 83\ ; 86\ ; 89\ ; 92\ ; 95\ ; 98\}$

d. $x - 48 \equiv 27[11]$ $x \equiv 75[11] \equiv 9[11]$ $x = 11k + 9$ avec $k \in \mathbb{Z}$	e. $5x + 18 \equiv 4x - 29[13]$ $x \equiv -47[13] \equiv 5[13]$ $x = 13k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Ex2. Quel est le reste dans la division euclidienne :

a) de 5^6 par 9 ? $5^6 = 15625 = 9 \times 1736 + 1 \equiv 1[9]$ et 1<9 donc reste =1

b) de 14^{200} par 5 ? $14 \equiv -1[5]$ donc $14^{200} \equiv (-1)^{200}[5] \equiv 1[5]$ et 1<5 donc reste =1

c) de 11^{101} par 3 ? $11 \equiv 2[3]$ et $11^2 = 121 \equiv 1[3]$

$11^{101} = 11^{100} \times 11^1 = (11^2)^{50} \times 11^1 \equiv 1^{50} \times 2[3] = 2[3]$ et 2<3 donc reste =2

Ex3. n désigne un entier naturel. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne :
a) de n^2 par 5 ? b) de n^3 par 7 ?

$n \equiv \cdots [5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv \cdots [5]$	0	1	4	4	1

Les restes possibles de n^2par 5 sont : 0 ; 1 ; 4

b)

$n \equiv \cdots [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \equiv \cdots [7]$	0	1	1	6	1	6	6

Restes possibles de n^3 par 7 sont : 0 ; 1 ; 6

Ex4. Dans le tableur ci-dessous, sont indiqués les restes de quelques puissances de 17 dans la division euclidienne par 13.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	1	2	3	4	5	6
2	17^n	17	289	4913	83521	1419857	24137569
3	Reste	4	3	12	9	10	1

formule en B2 : =17^B1
formule en B3 :
=MOD(B2;13)

En déduire le reste dans la division euclidienne :
a) de 17^{2019}par 13

$2013 = 6 \times 336 + 3$ donc $17^{2019} = (17^6)^{336} \times 17^3$
or $17^6 \equiv 1[13]$ et $17^3 \equiv 12[13]$
donc $17^{2019} \equiv 1^{336} \times 12[13] \equiv 12[13]$ et 12<13 donc reste =12

b) de 17^{2020} par 13
$17^{2020} = 17^{2019} \times 17^1 \equiv 12 \times 4[13] \equiv -1 \times 4[13] =$
$-4[13] \equiv 9[13]$ et 9<13 donc reste = 9

c) de $17^{2019} + 3 \times 17^{2020}$ par 13
$17^{2019} \equiv 12[13] et\ 3 \times 17^{2020} \equiv 3 \times 9[13] \equiv 27[13] \equiv 1[13]$
$17^{2019} + 3 \times 17^{2020} \equiv 12 + 1[13] \equiv 13[13] \equiv 0[13]$ et 0<13
donc reste = 0

Ex5. On suppose $a \equiv 3[5]$ et $b \equiv 4[5]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $7a^2 + 4b^2$ par 5.

$a \equiv 3[5]$ donc $a^2 \equiv 3^2[5] \equiv 9[5] \equiv 4[5]$ donc $7a^2 \equiv 7 \times 4[5] \equiv 28[5] \equiv 3[5]$
$b \equiv 4[5]$ donc $b^2 \equiv 4^2[5] \equiv 16[5] \equiv 1[5]$ donc $4b^2 \equiv 4[5]$
Par addition, on obtient $7a^2 + 4b^2 \equiv 3 + 4[5] \equiv 7[5] \equiv 2[5]$ et 2<5 donc le reste recherché est 2.