I. Généralités sur les matrices

Définition. Une matrice de taille (ou dimension) $m \times p$ est un tableau de nombres formé de m lignes et p colonnes. Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij}

Une telle matrice s'écrit sous la forme : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ a_{3p} & \cdots & \cdots & a_{3p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$

Les nombres a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.

Ex $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3. (2 lignes et 3 colonnes)

Le coefficient a_{13} est égal à 4 ; $a_{21} =$ _____ ; $a_{23} =$ _______

Définition. Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée une matrice colonne.
Une matrice de taille $1\times p$ est appelée une matrice ligne. Ex $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

Ex Les coordonnées d'un vecteur du plan est une matrice colonne de dimension 2×1. $\vec{u}\binom{-3}{4}$

Définition. Une matrice de taille $n \times n$ est appelée une matrice carrée d'ordre n.

Ex $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition. Pour une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n, l'ensemble $\{ a_{ii} ; 1 \leq i \leq n\}$ est l'ensemble des coefficient de la diagonale principale de A
Une matrice diagonale d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n telle que tous ses coefficients hors de la diagonale principale valent 0.

Exemple : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Propriété. Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même taille et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

II. Opérations sur les matrices

1) Somme de matrices

Définition : Soit *A* et *B* deux matrices de même taille.
La somme de *A* et *B* est la matrice, notée *A* + *B*, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans *A* et *B*.

Ex $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

Remarque : Cette définition montre qu'il n'est possible d'additionner que des matrices **de même taille**.

Définition. Une matrice nulle est une matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Propriétés : Soit A, B et C trois matrices carrées de même taille.
a) Commutativité : $A + B = B + A$
b) Associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$
c) $A + 0 = 0 + A = A$ (la matrice nulle joue le même rôle que le nombre 0 pour l'addition des nombres.

2) Multiplication d'une matrice par un réel

Définition : Soit A une matrice et k un nombre réel.
Le produit de A par le réel k est la matrice, notée kA, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.
Si a_{ij} représente le coefficient de la i ième ligne et de la j ième colonne de la matrice A, alors $k \times a_{ij}$ représente celui à la même position de la matrice kA.

Ex $A = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ alors $B = 2 \times A = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 0{,}5 \\ 2 \times 3 & 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Propriétés : Soit A et B deux matrices carrées de même taille et deux réels k et k'.
a) $(k + k')A = kA + k'A$
b) $k(A + B) = kA + kB$
c) $(kk')A = k(k'A)$
d) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

Définition. On appelle opposée de M, la matrice $(-1)M$ notée $-M$ et on définit ainsi la différence $A - B$ la matrice $A + (-B)$

3) Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Définition. Le produit d'une matrice ligne L par une matrice colonne C n'est possible qu'à condition que les tailles respectives de L et C soient du type $(1, p)$ et $(p , 1)$

Le produit de la matrice $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ est le nombre

$$LC = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 5 \times (-4) + (-3) \times (-2) = -12$

Définition. Soit *A* une matrice carrée de taille n et *B* une matrice colonne à n lignes telles que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le <u>produit de la matrice carrée *A* par la matrice colonne *B*</u> est la matrice colonne à n lignes, notée $A \times B$ et égale à :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 + \cdots + a_{1n} \times b_n \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 + \cdots + a_{2n} \times b_n \\ \cdots \\ a_{n1} \times b_1 + a_{n2} \times b_2 + \cdots + a_{nm} \times b_n \end{pmatrix}$$

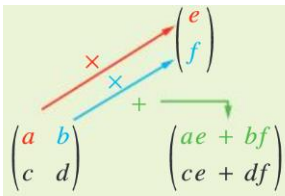
<u>Ex</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times 4 \\ -3 \times 3 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$

Définition. Le produit AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Si A est une matrice de taille (m, n) et B une matrice de taille (n, p), le produit est la matrice de taille (m, p) telle que le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B (voir produit d'une matrice ligne par une matrice colonne)

4) <u>Produit de deux matrices carrées</u>

Définition. Soit *A* et *B* deux matrices de même taille.
La <u>produit de *A* et *B*</u> est la matrice, notée $A \times B$, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice *A* par chaque colonne de la matrice *B*.



<u>Ex</u> $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$$A \times B = \begin{pmatrix} -2 \times 5 + 3 \times 4 & -2 \times (-6) + 3 \times 0 \\ 1 \times 5 + 2 \times 4 & 1 \times (-6) + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 13 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \times (-2) + (-6) \times 1 & 5 \times 3 + (-6) \times 2 \\ 4 \times (-2) + 0 \times 1 & 4 \times 3 + 0 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 3 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque :</u> La multiplication de matrices n'est pas commutative : $A \times B \neq B \times A$

<u>Propriétés :</u> Soit *A*, *B* et *C* trois matrices carrées de même taille et un réel *k*.
a) Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
b) Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
c) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

Remarque. Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $AB = 0$

Mais la réciproque est fausse ; $AB = 0$ peut être vérifiée sans que $A = 0$ ou $B = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

De même, l'égalité $AM = AN$ n'implique pas forcément que $M = N$

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{pmatrix}$

III. Matrice inverse

1) Matrice unité

Propriété : Il existe une matrice identité I_n telle que :

- $AI_n = A$ pour toute matrice à n colonnes,
- $I_nA = A$ pour toute matrice à n lignes.

$I_n$est la matrice carré d'ordre n contenant des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

Exemple : $I_1 = (1)$; $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Puissance d'une matrice carrée

Définition. Soit A une matrice carrée et *n* un entier naturel.

$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ facteurs}}$ si $p \neq 0$ et $A^0 = I_n$

Le carré de A est la matrice, noté A^2, égale à $A \times A$.

Le cube de A est la matrice, noté A^3, égale à $A \times A \times A$.

Plus généralement, la puissance n-ième de *A* est la matrice, notée A^n ,égale au produit de n facteurs A.

cas particulier. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 2.

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

On constate après calcul que tous les coefficients qui ne se trouvent pas sur la diagonale s'annulent et que sur la diagonale, les coefficients de A^2 sont égaux aux carrées des coefficients de A.

On peut généraliser cette règle à une puissance quelconque.

Ainsi par exemple, $A^5 = \begin{pmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix}$.

⚠ en général pour $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A^n \neq \begin{pmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n \\ a_{21}^n & a_{22}^n \end{pmatrix}$

2) Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition. Une matrice carrée A de taille n est une matrice inversible s'il existe une matrice carrée d'ordre n, notée A^{-1}telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.
La matrice A^{-1} est alors unique et appelée la matrice inverse de A.

Remarque. **On admettra** que si on trouve une matrice B telle que $A \times B = I_n$, il n'est pas nécessaire de calculer $B \times A$ pour conclure que $B = A^{-1}$.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 \times 0{,}2 + (-1) \times (-0{,}4) & 3 \times 0{,}2 + (-1) \times 0{,}6 \\ 2 \times 0{,}2 + 1 \times (-0{,}4) & 2 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre et $B = A^{-1}$.

Déterminant d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carré d'ordre 2.

On appelle déterminant de A le nombre $\det(A) = a \times d - b \times c$

Matrice d'ordre 2 inversible

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$; alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

IV. Ecriture matriciel d'un système linéaire

Définition.
Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n nombres réels inconnus
Pour i et j deux entiers allant de 1 à n, on note a_{ij} des nombres réels fixés.
Soient $b_1, b_2, \dots, b_n$ n réels fixés.
On appelle système linéaire (S) de n équations à n inconnues, le système d'inconnues
$x_1, x_2, \dots, x_n$ suivant : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_n \end{cases}$

Exemple :

On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

On pose : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

On a alors : $AX = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = B$; ainsi le système peut s'écrire $AX = B$

Propriété : Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire.
Si la matrice carrée A est une matrice **inversible**
alors le système a une **unique solution** donnée par la matrice colonne $X = A^{-1}B$.

Démonstration : $A \times X = B$; on multiplie à gauche par A^{-1} ;
on obtient : $A^{-1}AX = A^{-1}B$
soit $I_2X = A^{-1}B$ soit $X = A^{-1}B$

Remarque :
Si A n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

ALGO PYTHON ①

On a écrit dans l'éditeur les instructions suivantes.

```
from numpy import *
a=array([[2,1],[1,-3]])
b=array([[5,7],[-1,0]])
```

1. À quoi sert l'instruction `array([[2,1],[1,-3]])` ?

2. Qu'obtient-on quand on écrit dans la console l'instruction `>>> a+b` ?

3. En utilisant la console, calculer $a-b$, puis $2a-3b$.

ALGO PYTHON ②

On considère la fonction Python ci-dessous.

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
def produit(x,y,z):
    A=array([[3,5,-1],[4,2,1],[-3,-1,7]])
    B=array([[x],[y],[z]])
    return dot(A,B)
```

1. Que renvoie cette fonction si on entre en arguments 2, 1 et 4 ?

2. Que fait cette fonction ?

3. Modifier le programme de la fonction pour qu'elle renvoie le produit de la matrice

$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 7\end{pmatrix}$ par la matrice ligne $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$.

ALGO PYTHON ③

1. Écrire une fonction Python, nommée puissance, d'arguments les quatre éléments d'une matrice carrée A d'ordre 2 et qui renvoie la matrice A^5.

2. Modifier la fonction précédente, afin que la fonction renvoie A^n, en ajoutant un argument supplémentaire égal à la puissance n souhaitée.

ALGO PYTHON ④

On considère les instructions suivantes écrites dans un éditeur Python.

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A=array([[3,-2,1],[-1,1,-2],[2,-2,3]])
B=array([[17],[-12],[20]])

X=dot(inv(A),B)
```

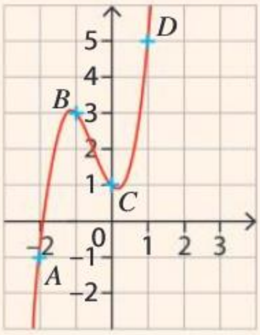
1. En utilisant les éléments de la copie d'écran ci-dessus, déterminer le système que ces instructions permettent de résoudre.

2. De quel type est la variable X ?

3. Quelles valeurs contient la variable X après exécution de ces instructions ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, où a, b, c et d sont quatre réels.

On dispose ci-dessous de la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe passe par les points $A(-2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(0;1)$ et $D(1;5)$.



1. Déterminer les coefficients a, b, c et d de la fonction f.

2. Compléter les instructions ci-dessous écrites dans un éditeur Python pour qu'elles permettent de retrouver les valeurs de a, b, c et d.

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A=array([[...],[...],[...],[...]])
B=array([...,...,...])
X=...
```

ALGO PYTHON ⑤

On considère la fonction Python suivante.

```
1 from numpy import *
2 from numpy.linalg import *
3 def puissance(a,b,c,d,n):
4     A=array([[a,b],[c,d]])
5     C=A
6     for i in range(1,n):
7         A=dot(A,C)
8     return A
```

1. Que définit-on à la ligne 4 ?

2. Que renvoie cette fonction ?

3. Tester cette fonction avec $A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$ et $n=10$, puis $n=20$. Quel résultat peut-on conjecturer lorsque n tend vers $+\infty$?