126 Système de congruences

On considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 1\ (5) \end{cases}$

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $(n-11)$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

1.
$11 = 3 \times 3 + 2 \equiv 2(3)$
$11 = 5 \times 2 + 1 \equiv 1(5)$
donc 11 vérifie les deux équations donc 11 est solution du système.

2. Si n solution de (S), alors $n \equiv 2(3)$
donc $n - 11 \equiv -9(3) \equiv 0(3)$
donc $n - 11$ est divisible par 3.

3. De même si n solution de (S), alors $n \equiv 1(5)$
donc $n - 11 \equiv -10(5) \equiv 0(5)$
donc $n - 11$ est divisible par 5.
$n - 11$ est divisible par 3 et par 5
5 et 3 n'ont pas de diviseur commun
donc $n - 11$ est divisible par $3 \times 5 = 15$
donc $n - 11 \equiv 0(15)$
soit n s'écrit sous la forme $11 + 15k$ avec k entier