42 Soit n un entier relatif. Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{6n+12}{2n+1}$ est-elle un entier relatif ?

$\frac{6n+12}{2n+1}$ entier relatif

$\Leftrightarrow$ $2n+1$ divise $6n+12$

L'objectif est de déterminer une combinaison linéaire de $2n+1$ et $6n+12$ qui soit indépendant de n

$2n+1$ divise $2n+1$ et $6n+12$

donc $2n+1$ divise toutes combinaisons linéaires de $2n+1$ et de $6n+12$

donc $2n+1$ divise $3(2n+1)-(6n+12)=6n+3-6n-12=-9$

Les diviseurs de -9 sont : $D_{-9}=\{-9\,;\,-3\,;\,-1\,;1\,;3\,;9\,\}$

$2n+1=-9$ $n=-5$	$2n+1=-3$ $n=-2$	$2n+1=-1$ $n=-1$	$2n+1=1$ $n=0$

$2n+1=3$ $n=1$	$2n+1=9$ $n=4$

Réciproquement : on vérifie aisément que pour chacune des solutions, on a bien $2n+1$ divise $6n+12$ soit $\frac{6n+12}{2n+1}$ entier relatif

$n=-5\,;\frac{-18}{-9}=2$

$n=-2\,;\ \frac{0}{-3}=0$

$n=-1\,;\frac{6}{-1}=-6$

$n=0\,;\ \ \frac{12}{1}=12$

$n=1\,;\qquad \frac{18}{3}=6$

$n=4\,;\qquad \frac{36}{9}=4$

$n\in\{-5\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;4\,\}$