

43 Soit n un entier relatif. Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{9n-4}{3n+1}$ est-elle un entier relatif ?

$$\frac{9n-4}{3n+1} \text{ entier relatif}$$

$$\Leftrightarrow 3n + 1 \text{ divise } 9n - 4$$

L'objectif est de déterminer une combinaison linéaire de $3n + 1$ et $9n - 4$ qui soit indépendant de n

$$3n + 1 \text{ divise } 3n + 1 \text{ et } 9n - 4$$

donc $3n + 1$ divise toutes combinaisons linéaires de $3n + 1$ et de $9n - 4$

$$\text{donc } 3n + 1 \text{ divise } 3(3n + 1) - (9n - 4) = 9n + 3 - 9n + 4 = 7$$

Les diviseurs de 7 sont : $D_7 = \{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$

$3n + 1 = -7$ $n = -\frac{8}{3}$ ne convient pas	$3n + 1 = -1$ $n = -\frac{2}{3}$ ne convient pas	$3n + 1 = 1$ $n = 0$	$3n + 1 = 7$ $n = \frac{6}{3} = 2$
--	--	-------------------------	---------------------------------------

Réciproquement : on vérifie aisément que la solution $n=0$ et $n=2$, on a bien $3n + 1$ divise $9n - 4$ soit $\frac{9n-4}{3n+1}$ entier relatif

$$n = 0 ; \quad \frac{-4}{1} = -4$$

$$n = 2 ; \quad \frac{14}{7} = 2$$

$$n \in \{0; 2\}$$