mathsbdp.fr p92_49_correction

49 On pose : $a_n = n^5 - n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que a_n est pair.
2. Montrer que a_n est divisible par 3.
3. En utilisant les congruences modulo 5, démontrer que a_n est divisible par 5.
4. Pourquoi a_n est-il divisible par 30 ?

1.

$a_n = n^5 - n = n(n^4 - 1)$

$= n((n^2)^2 - 1^2)$

$= n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$= n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

$= (n-1) \times n \times (n+1) \times (n^2+1)$

On a un produit avec trois facteurs consécutifs
donc on a au moins un facteur pair
donc (a_n) est pair.

2. Pour $(n-1) \times n \times (n+1)$, on a un facteur qui est multiple de 3
donc $a_n = (n-1) \times n \times (n+1) \times (n^2+1)$
est divisible par 3.

3. $2^5 = 32 \equiv 2(5)$;

$3^2 \equiv 4(5); 3^3 \equiv 12(5) \equiv 2(5)$

$3^4 \equiv 6(5) \equiv 1(5)$; $3^5 \equiv 3(5)$

$4^2 = 16 \equiv 1(5): 4^3 \equiv 4(5); 4^4 \equiv 1(5); 4^5 \equiv 4(5)$

$n \equiv \cdots (5)$	0	1	2	3	4
$n^5 \equiv \cdots (5)$	0	1	2	3	4
$n^2 - n \equiv \cdots (5)$	0	0	0	0	0

Pour tout entire n on a d'après le tableau
$n^2 - n \equiv 0(5)$ donc $n^5 - n$ est divisible par 5.

4. D'après les questions précédentes, on a :
a_n pair donc divise par 2 ; a_n divisible par 3 ;
a_n divisible par 5 donc a_n est divisible par $2 \times 3 \times 5 = 30$