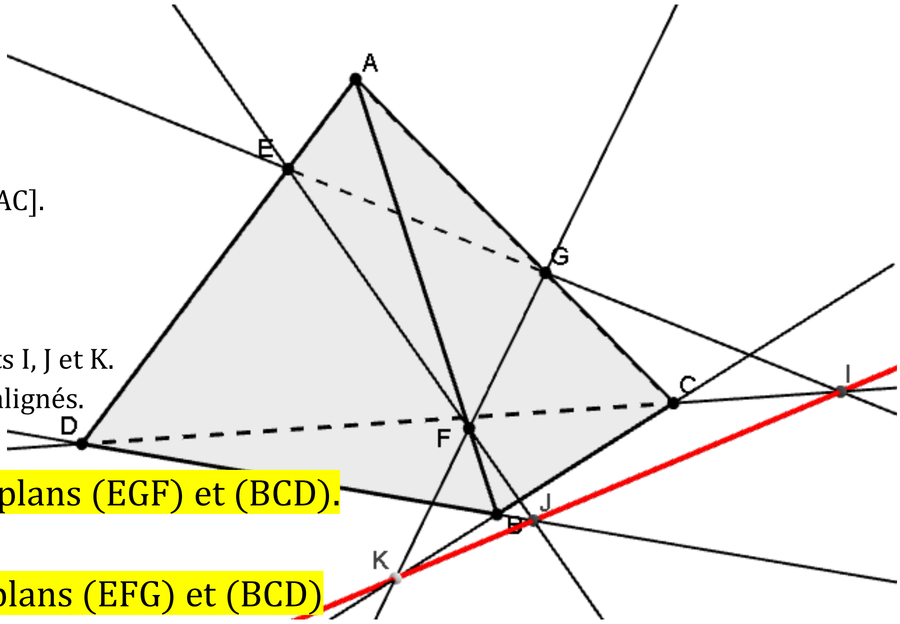
NOM : ________________ ***Devoir de Mathématiques n°7*** TS4

Ex1. (3 points)

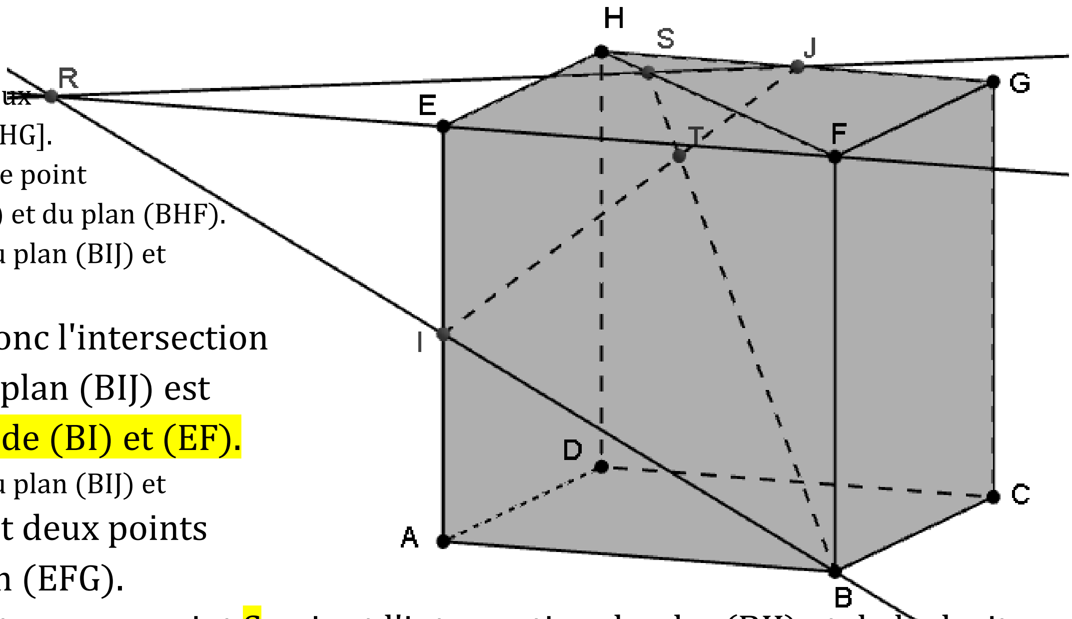


ABCD est un tétraèdre.
E, F et G sont trois points appartenant respectivement aux arêtes [AD], [AB] et [AC].
I, J et K sont les points d'intersection respectifs des droites (EG) et (DC), (EF) et (DB), (GF) et (BC).

1. Compléter la figure en plaçant les points I, J et K.
2. Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

$I = (EG) \cap (DC)$ donc
I appartient à l'intersection des plans (EGF) et (BCD).
$J = (EF) \cap (BD)$ donc
J appartient à l'intersection des plans (EFG) et (BCD).
Les deux plans (BCD) et (EFG) sont sécants suivant la droite (IJ).
Or K=(FG)$\cap$ (BC) donc K appartient aussi à l'intersection des plans (EFG) et BCD).
K appartient donc à la droite (IJ) donc les points I, J et K sont alignés.

Ex2. (4,5 points)



ABCDEFGH est un cube.
Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AE] et [HG].
On se propose de construire le point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (BHF).

1. Construire l'intersection du plan (BIJ) et de la droite (EF).

(BI) et (EF) sécantes donc l'intersection de la droite (EF) et du plan (BIJ) est le point R, intersection de (BI) et (EF).

2. Construire l'intersection du plan (BIJ) et de la droite (HF). R et J sont deux points du plan (BIJ) et du plan (EFG).

(RJ) et (HF) sont sécantes en un point S qui est l'intersection du plan(BIJ) et de la droite (HF)

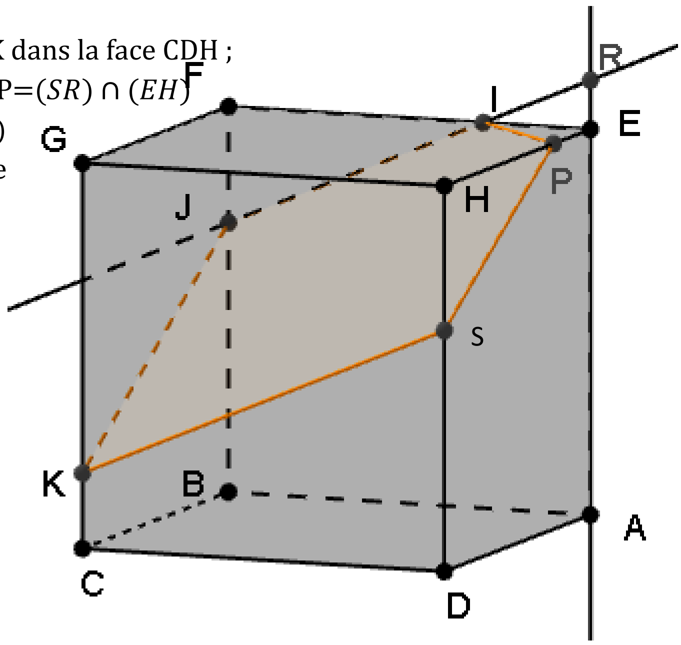
3. Construire l'intersection des plans (BIJ) et (BHF). Il s'agit de la droite (BS) car B et S sont deux points communs des plans (BIJ) et (BHF)

4. En déduire la construction du point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (BHF). Il s'agit du point T, intersection des droites (IJ) et (BS) car (IJ)$\subset$ (BIJ) et (BIJ)$\cap$(BHF)=(BS).

Ex3. ABCDEFGH est un cube. I, J, K sont des points placés respectivement sur les arêtes [EF], [BF] et [CG].
Construire la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).

$R = (IJ) \cap (AE)$; on trace la parallèle à (IJ) passant par K dans la face CDH ;
On obtient S l'intersection de cette parallèle avec (DH) ; P=$(SR) \cap (EH)$
À partir de S, on trace dans le plan AED, la parallèle à (JK) passant par S ; on obtient P intersection de cette parallèle avec l'arête [HE].

La section est IPSKJ.



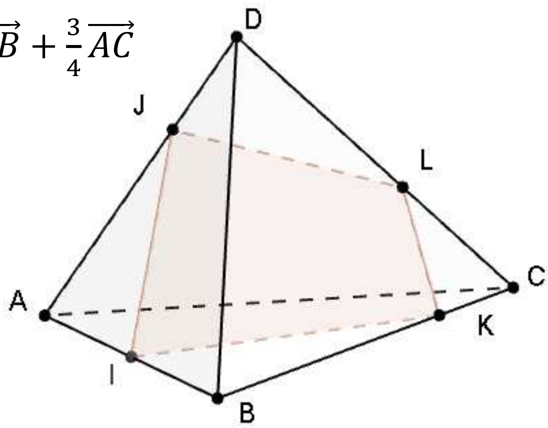
Ex4. (3 points)

ABCD est un tétraèdre. I est le milieu du segment [AB].
Les points J, K et L sont définis par :
$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$.

En utilisant le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, dire si les points I, J, K et L sont coplanaires.

$A(0\,;0\,;0\,);I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\,\right);J\left(0\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



$K\left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\,;0\,\right)$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

L$\left(0\,;\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$; $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\,;0\,\right)$; $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{5}\,;\frac{2}{5}\right)$

On cherche à déterminer deux réels a, b tels que $\overrightarrow{IL} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$

On obtient le système : $\begin{cases} -\frac{a}{2} - \frac{b}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}b = \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3}a = \frac{2}{5} \end{cases}$; l'équation L2 donne $b = \frac{4}{5}$ et L3 donne $a = \frac{3}{5}$

On vérifie si L1 est vraie avec les valeurs obtenues pour a et b.

$-\frac{a}{2} - \frac{b}{4} = -0{,}3 - 0{,}2 = -0{,}5 = -\frac{1}{2}$; L1 est vérifiée.

$\overrightarrow{IL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} + \frac{4}{5}\overrightarrow{IK}$ donc on en déduit que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Ex5. E, F et G appartiennent respectivement aux arêtes [SA], [SB] et (SC].

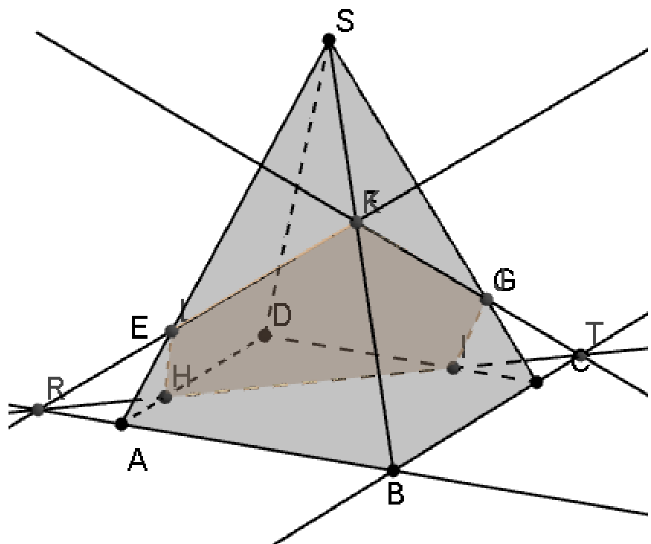
a) Construire l'intersection des plans (EFG) et (ABC).

R=(EF)$\cap (AB)$; $T = (FG) \cap (BC)$

$(EFG) \cap (ABC) = (RT)$

b) En déduire la section de la pyramide SABCD par le plan (EFG).

EFGIH



Ex6. Soient les droites D_1 et D_2 d'équations paramétriques respectives $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et $\begin{cases} x = 3 - u \\ y = -4 + 2u \\ z = 9 - u \end{cases}$ avec $u \in \mathbb{R}$

1) Justifier que les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

$\overrightarrow{u_1}(2\,;\,-1\,;4\,)$ et $\overrightarrow{u_2}(-1\,;2\,;\,-1\,)$ vecteurs directeurs respectifs de D_1 et D_2.

$\frac{2}{-1} \neq -\frac{1}{2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires

donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

2) On a effectué la recherche suivante à l'aide du logiciel Xcas : resoudre([-1+2t=3-u,1-t=-4+2u,3+4t=9-u],[t,u])

$(1\ 2)$

En admettant le résultat obtenu par le logiciel, peut-on affirmer que les droites D_1 et D_2 sont sécantes ? Si oui, en quel point ?

Il existe deux paramètres $(t\,;u\,) = (1\,;2\,)$ tels que

$\begin{cases} x = -1 + 2t = 3 - u \\ y = 1 - t = -4 + 2u \\ z = 3 + 4t = 9 - u \end{cases}$ donc il existe un point $M\ (\,x\,;y\,;z)$ dont les coordonnées vérifient à la fois l'équation de D_1 et celle de D_2 donc les deux droites sont sécantes au point de coordonnées $(\,1\,;0\,;7\,)$

b) Les droites D_1 et D_2 sont-elles coplanaires ?

Résolution du système : $\begin{cases} x = -1 + 2t = 3 - u & L_1 \\ y = 1 - t = -4 + 2u & L_2 \\ z \ = 3 + 4t = 9 - u & L_3 \end{cases}$;

Utilisons L_1 et L_2 pour déterminer t *et* u ; de L_1, on écrit $u = 4 - 2t$

On remplace dans L_2, le u par $4 - 2t$; L_2 devient : $1 - t = -4 + 2(4 - 2t)$

soit $t = 1$; de L_1, on écrit $u = 4 - 2t = 4 - 2 \times 1 = 2$

Vérifions que l'équation L_3 est vérifiée pour $t = 1$ et $u = 2$

$3 + 4t = 7\,; 9 - u = 9 - 2 = 7$ donc L_3 est vérifiée ; le système admet comme unique solution $(t = 1\,; u = 2\,)$.

Les droites D_1 et D_2 sont sécantes au point $(\,1\,;0\,;7\,)$; elles sont donc coplanaires.

Ex7. On se place dans un repère $(\,O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace.

On donne les points $A\ (\,1\,;0\,;4\,)$, $B\ (\,2\,;3\,;0\,)$, $C\ (\,-1\,;2\,;0\,)$, $D\ (\,10\,;2\,;3\,)$ et $E\ (\,15\,;5\,;1\,)$.

1) Justifier que A, B et C définissent un plan.

$\overrightarrow{AB}(1\,;3\,;-4\,)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;2\,;\,-4\,)$; $\frac{1}{-2} \neq \frac{3}{2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent un unique plan.

2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{DE}(5\,;3\,;\,-2\,)$; $\overrightarrow{AB}(1\,;3\,;-4\,)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;2\,;\,-4\,)$

On cherche un couple $(a\,;b) \neq (\,0\,;0\,)$ tel que $\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

a et b vérifient le système : $\begin{cases} a - 2b = 5 & L_1 \\ 3a + 2b = 3 & L_2 \\ -4a - 4b = -2 & L_3 \end{cases}$; utilisons L_1 et L_2 pour déterminer a et b

En additionnant L_1 et L_2, on obtient $4a = 8$ soit $a = 2$; $L_1 : 2 - 2b = 5$

$soit\ b = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Pour $a = 2$ et $b = -1{,}5$ l'équation L_3 est-elle vérifiée ? $-4a - 4b = -8 - 4 \times (-1{,}5) = -2$

L_3 est vérifiée ; le système admet une unique solution $a = 2\ et\ b = -1{,}5$

On a la relation $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB} - 1{,}5\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

3) Que peut-on en déduire pour la droite (DE) ?

La droite (DE) est parallèle au plan (ABC).

4) Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t \qquad avec\ t \in \mathbb{R} \\ z = -4t + 4 \end{cases}$$

5) Déterminer une équation paramétrique du plan (CDE).

Le plan (CDE) est défini à partir du point C et des deux vecteurs directeur $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ (non colinéaires $\overrightarrow{CD}(\,11\,;0\,;3\,)$; $\overrightarrow{CE}(16\,;3\,;1\,)$)

$M(x\,;y\,;z\,) \in (CDE) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD} + k'\overrightarrow{CE}$ avec $k\ et\ k'$ réels

équation paramétrique du plan (CDE) : $\begin{cases} x = 11k + 16k' - 1 \\ y = 3k' + 2 \\ z = 3k + k' \end{cases}$ avec $k\ et\ k'$ réels

6) Le point R ($0\,; -4\,;\ -7$) appartient-il au plan (CDE) ?

On doit résoudre le système $\begin{cases} 11k + 16k' - 1 = 0 & L_1 \\ 3k' + 2 = -4 & L_2 \\ 3k + k' = -7 & L_3 \end{cases}$

En utilisant L_2 et L_3, on obtient $k = -\frac{5}{3}\ et\ k' = -2$

L_1 est-elle vérifiée ? pour $k = -\frac{5}{3}\ et\ k' = -2,\ \ 11k + 16k' - 1 = -\frac{151}{3} \neq -7$

donc le point R n'appartient au plan (CDE).

<u>BONUS</u> Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et du plan (CDE).

On cherche les paramètres k, k' et t tels que les coordonnées d'un point vérifient à la fois l'équation paramétrique de (CDE) et celle de (AB)

On doit résoudre le système $\begin{cases} x = 11k + 16k' - 1 = t + 1 \\ y = 3k' + 2 = 3t \\ z = 3k + k' = -4t + 4 \end{cases}$ qui s'écrit $\begin{cases} 11k + 16k' - t = 2 \\ 3k' - 3t = -2 \\ 3k + k' + 4t = 4 \end{cases}$

On obtient (calculatrice) $k = -\frac{2}{3}; k' = \frac{2}{3}; t = \frac{4}{3}$

Les coordonnées du point d'intersection sont $(\frac{7}{3}\ ; 4\ ;\ -\frac{4}{3})$.