Ex1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

$u_0 = 1$; $u_1 = 5$; $u_2 = 17$

$u_1 - u_0 = 4 \neq u_2 - u_1 = 12$ donc (u_n) non arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = 5 \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{17}{5} = 3{,}4$ donc (u_n) non géométrique

2. Écrire un algorithme en langage courant qui affiche le terme de rang n après avoir saisi n.

```
saisir N
U prend la valeur 1
Pour I allant de 1 à N
U  prend la valeur 3U+2
FinPour
Afficher U
```

```
N prend la valeur 0
U prend la valeur 1
TantQue U≤ 10^5
U prend la valeur 3U+2
N prend la valeur N+1
FinTantQue
Afficher N
```

3. Utilise la calculatrice pour donner les valeurs de $u_6 = 1457$ et $u_9 = 39\,365$

4. Complète l'algorithme ci ci-contre afin qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 10^5$;

$u_9 = 39365$ et $u_{10} = 118\,097 > 100\,000$

donc $n = 10$

5. On donne la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; on précisera son premier terme et sa raison.

$v_n = u_n + 1 \Leftrightarrow u_n = v_n - 1$

$v_{n+1} = u_{n+1} + 1$

$= 3u_n + 2 + 1$
$= 3u_n + 3$
$= 3(v_n - 1) + 3 = 3v_n$
donc (v_n) suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$

6. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

(v_n) suite géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$

$u_n = v_n - 1 = 2 \times 3^n - 1$

Ex3. (v_n) suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 0{,}001$.

$$v_{10} = v_1 \times q^9 = 0{,}001 \times 2^9 = 0{,}512$$

$$S_{20} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{20} = v_1 \times \frac{1-q^{20}}{1-q}$$

$$= 0{,}001 \times \frac{1-2^{20}}{1-2} = 1048{,}575$$

Ex3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 4x - 1$.

a) Exprimer u_2 en fonction de a.

$u_1 = 4a - 1$

$u_2 = 4(4a - 1) - 1 = 16a - 4 - 1 = 16a - 5$

b) On choisit $a = 5$; calculer u_3.

$u_1 = 4u_0 - 1 = 19 \,;\, u_2 = 4u_1 - 1 = 76 - 1 = 75 \,;$

$u_3 = 4 \times 75 - 1 = 299$

Ex4.

Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $2^n \geq n + 1$.

1 Soit P_n la propriété : $2^n \geq n + 1$

2 Initialisation : $2^0 = 1$ et 0+1=1 donc $2^0 \geq 0 + 1$ donc P_0 vraie

3 Hérédité : on suppose P_n vraie pour $n \geq 0$

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $2^{n+1} \geq n + 2$.

P_n vraie donc $2^n \geq n + 1$

On multiplie l'inégalité par 2 ;
on obtient : $2^{n+1} \geq 2n + 2$
or n entier naturel donc $n \geq 0$; en additionnant de part et d'autre $n + 2$, on obtient $2n + 2 \geq n + 2$
On a donc $2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$ donc P_{n+1} vraie.

④Conclusion :
P_0 vraie
et P_n héréditaire
donc par récurrence, pour tout entier naturel n
on a $2^n \geq n + 1$

Ex5. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - n + 3 \end{cases}$

a) $u_1 = u_0 - 0 + 3 = 4 - 0 + 3 = 7$
$u_2 = u_1 - 1 + 3 = 7 - 1 + 3 = 9$

b) $u_{n+1} - u_n = -n + 3 \leq 0$ pour $n \geq 3$
car $-n + 3 \leq 0$
$\Leftrightarrow 3 \leq n$
$\Leftrightarrow n \geq 3$
donc la suite (u_n) est décroissante à partir de $n \geq 3$

BONUS Déterminer l'entier naturel n tel que : $20 + 21 + 22 + \cdots + n = 4\,760$

1+2+…+19=190

1+2+3+…+19+20+…+n=$\frac{n(n+1)}{2} = 4760$+190

donc $\frac{n(n+1)}{2} = 4950$

$n(n+1) = 9900$ soit $n^2 + n - 9900 = 0$

avec la calculatrice, on obtient : $n = 99$

x1	-100
x2	99
$\Delta = b^2 - 4ac$	39601