Ex1. Déterminer chacune des limites en détaillant :

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\frac{5}{2-x}\right) = -\infty\ car\ \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(2-x) = 0^-$$

$$\left(du\ type\,\frac{1}{0^-}\to -\infty\right)$$

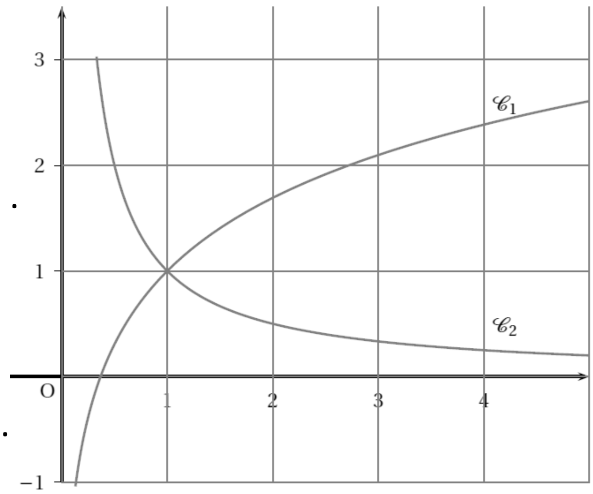
$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+1}{2x+3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right) = 2{,}5$

Ex2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé les courbes $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]\,0\,;\ +\infty\,[$.

On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_2$.
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\,0\,;\ +\infty\,[$.
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;\ +\infty\,[$.
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.



Partie A.

Pour chacune des questions, une seule proposition est vraie.

Entoure la bonne réponse **sans justifier**.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$ d. On ne peut pas conclure.

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

a. 0 b. 0.2 c. $+\infty$ d. On ne peut pas conclure.

3. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

a.

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	$+$

b.

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	$-$

c.

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	$+\ 0\ -$

Partie B.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = g(x) + 1 - \frac{1}{x}$ avec g fonction strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty \; et \; \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \; \left(car \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty\right)$$

$$donc \; \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \; donc \; \lim_{x\to+\infty} g(x) + 1 - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$donc \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

$$f'(x) = g'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = g'(x) + \frac{1}{x^2}$$

or g strictement croissante donc $g'(x) \geq 0 et \frac{1}{x^2} > 0$

donc $f'(x) > 0 \; sur \;]\,0\,;\,+\infty\,[$

donc f strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

c. On note α le réel tel que $f(\alpha) = 0$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ex3. Partie A. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels et $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction f dans un repère.

On sait que : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Déterminer a et b en détaillant

$$f(0) = \frac{b}{-1} = 1 \text{ soit } b = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax}{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} = 2 \text{ donc } a = 4$$

Partie B. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{4x-1}{2x-1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

$$D_g = IR - \left\{\frac{1}{2}\right\} =]-\infty\,;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$$

b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x<0,5}} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe C_g ?

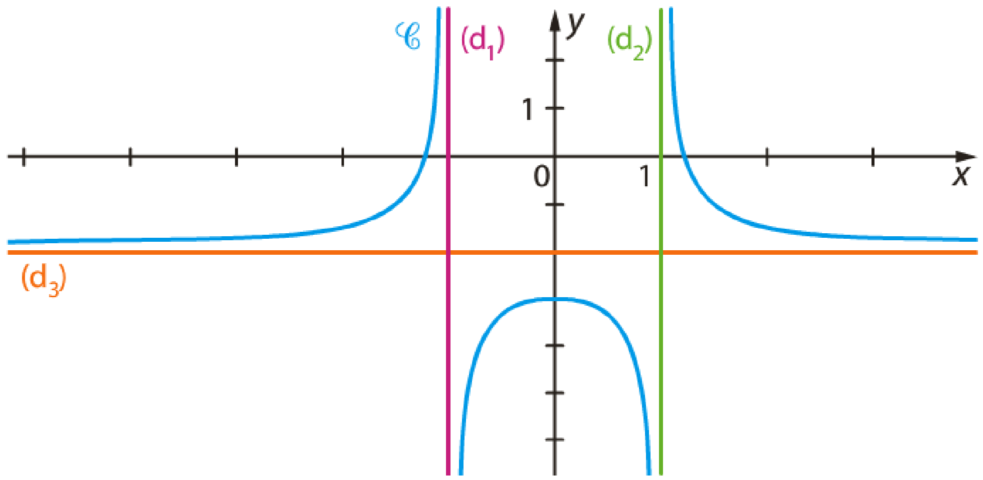
$$\lim_{\substack{x \to 0,5 \\ x<0,5}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0,5 \\ x<0,5}} \left(\frac{4x-1}{2x-1}\right) = \lim_{\substack{x \to 0,5 \\ x<0,5}} \frac{1}{2x-1} = -\infty$$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x<0,5}} (2x-1) = 0^-$ (du type $\frac{1}{0^-} \to -\infty$)

La courbe de la fonction g a une asymptote verticale d'équation $x = 0,5$

Ex4. f est une fonction dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}$.
Les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont des asymptotes à $\mathcal{C}$.
Établir le tableau de variation de f en indiquant les limites.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2



Ex5. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x - 20$

a) Déterminer les limites de la fonction en $-\infty$ et $+\infty$ en détaillant.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 9x^2 + 24x - 20) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 9x^2 + 24x - 20) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

b) Établir le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en détaillant la démarche.

$f'(x) = -6x^2 + 18x + 24$

racines de $-6x^2 + 18x + 24$:

$\Delta = (18)^2 - 4 \times (-6) \times 24 = 900$

$x_1 = \frac{-18-30}{-12} = 4$; $x_2 = \frac{-18+30}{-12} = -1$

Les racines de $-6x^2 + 18x + 24$ sont -1 et 4.

Le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-33	$\nearrow$	92	$\searrow$	$-\infty$

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 200$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

D'après le tableau de variations

Sur $]-1\,;\,+\infty[$, le maximum de f est 92

donc pas de solution pour l'équation $f(x) = 200$

Sur $]-\infty\,;\,-1]$

$\rightarrow f$ continue

$\rightarrow f$ strictement décroissante

$\rightarrow f(-1) = -33 < 200$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty > 200$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 200$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;\,-1]$.

conclusion : sur IR, l'équation $f(x) = 200$ admet une unique solution qui appartient à l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

d) Donner à l'aide de la calculatrice l'arrondi de α à 10^{-2} près.

à la calculatrice, on obtient $\alpha \approx -4{,}286428$

$\alpha \approx -4{,}29$ arrondi à 10^{-2}

BONUS. On considère l'algorithme ci-contre.
À un nombre X, on obtient en sortie un nombre Y.
On définit ainsi une fonction f qui a un nombre X associe son image $Y = f(X)$
Représenter graphiquement la fonction f.

saisir X
si $X < 1$
alors Y prend la valeur $2X + 1$
sinon Y prend la valeur $4 - X$
FinSi
afficher Y