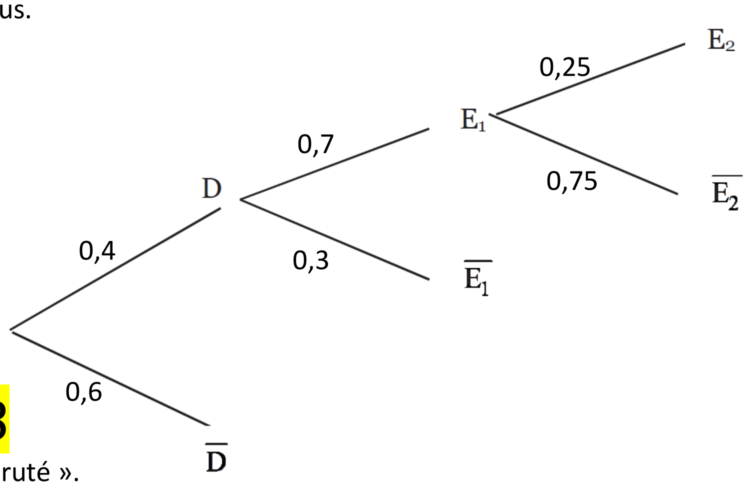
Ex1. Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante : le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier ; 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les évènements suivants :
– D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
– E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
– E_2 : « Le candidat est recruté ».
a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

$P(E_1) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

$P(F) = 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}75 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 = 0{,}93$

OU $P(E_2) = 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}25 = 0{,}07$

$P(F) = 1 - P(E_2) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.
On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par *X* la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.
a. Justifier que *X* suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

On a une répétition de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (recruté ou non recruté) donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de recrutés (succès) parmi les 5 suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}07$

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés.
On arrondira à 10^{-3}.

$P(X = 2) \approx 0{,}039$ (OPT STAT DISTRIB BINOM BPD(2,5,0.07))

3. 3. On note n le nombre de dossiers traités par le cabinet de recrutement. On admet que les dossiers sont étudiés indépendamment les uns des autres.
On admet que la probabilité que le candidat correspondant à un dossier soit recruté est égale à 0,07. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces n candidats.
a) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}93^n$

b) Voici un programme incomplet écrit en langage Python qui permet d'obtenir le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999.
Compléter les cadres par les instructions manquantes.

```
n=0
while 1-0.93**n<=0.999:
    n=n+1
print("L'entier n cherché est ",n)
```

c) Déterminer par le calcul la valeur affichée en sortie par le programme.

$$1 - 0{,}93^{95} \approx 0{,}998989 \ldots < 0{,}999$$
$$1 - 0{,}93^{96} \approx 0{,}99905 \ldots > 0{,}999$$

Il faut traiter au moins 96 dossiers pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999.

Ex2.

Dans une entreprise, 6 machines sont installées en même temps ; la probabilité que l'une d'entre elles n'ait pas eu de panne au bout d' un an est de 0,8.

1. Calculer la probabilité pour que, au bout d'un an, au moins 3 machines n'aient pas eu de panne. (arrondir à 10^{-3})

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de machine(s) qui n'ont pas eu de panne au bout de 1 an.

On a une répétition de 6 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de de machines qui n'ont pas eu de panne la première année (succès) suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}8$.

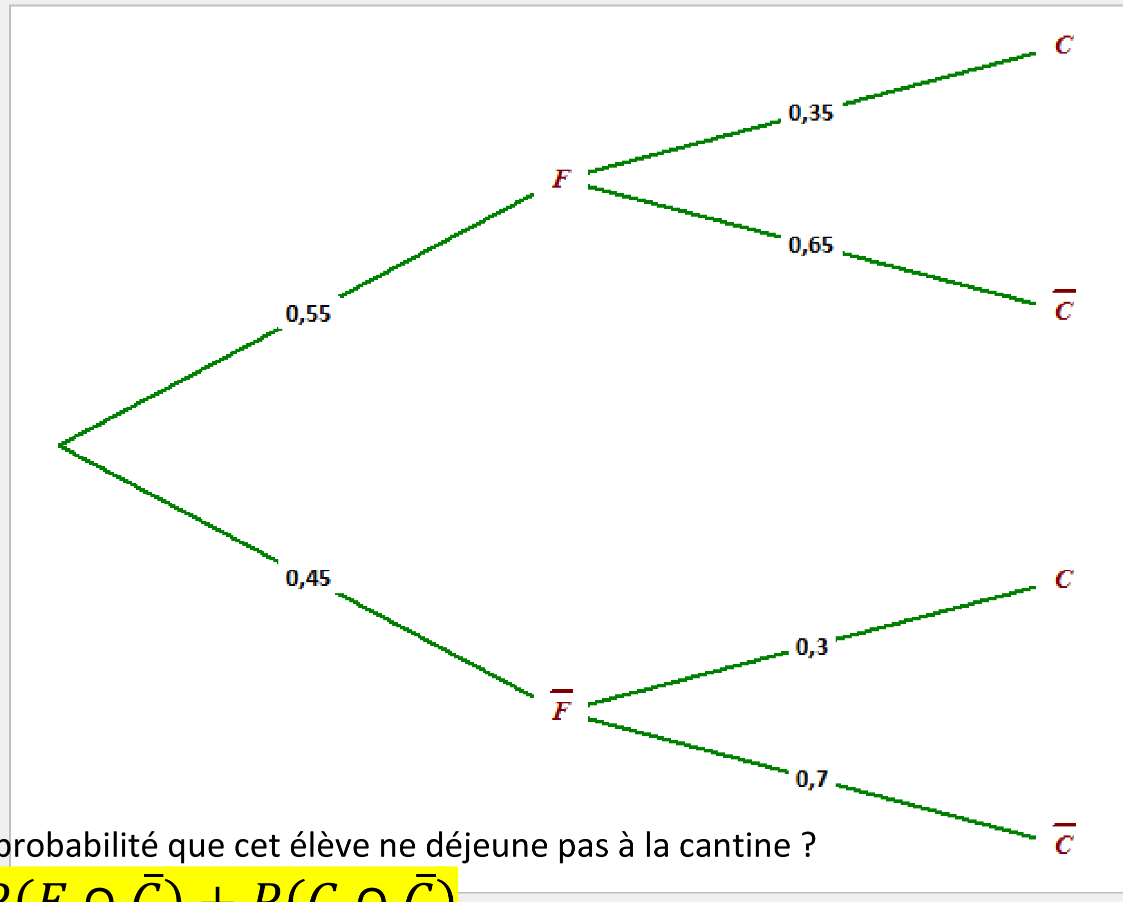
$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}983$$

2. Sachant qu'il y a eu au moins 3 machines qui n'aient pas eu de panne, calculer la probabilité qu'il n'y en ait eu au plus 5. (arrondir à 10^{-3})

$$P_{X\geq 3}(X \leq 5) = \frac{P(3\leq X\leq 5)}{P(X\geq 3)} = \frac{P(X\leq 5)-P(X\leq 2)}{P(X\geq 3)}$$

$$\approx \frac{0{,}720896}{0{,}98304} \approx 0{,}733$$

Ex3.1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine. On choisit, au hasard, un élève du lycée.



Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

$$P(\bar{C}) = P(F \cap \bar{C}) + P(G \cap \bar{C})$$
$$= 0{,}55 \times 0{,}65 + 0{,}45 \times 0{,}7 = 0{,}6725$$

2. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n =20 et $p = \frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit strictement supérieur à 5. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.

$$P(Y > 5) = P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5)$$
$$\approx 0{,}196(\ 0{,}19579 \ldots\ )$$

3. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.

On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ». On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

L'énoncé nous donne : $P(A) = 0{,}02$ et $P(A \cup F) = 0{,}069$

$P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F)$

or A et F sont deux événements indépendants

donc $P(A \cap F) = P(A) \times P(F) = 0{,}02 \times P(F)$

soit $0{,}069 = 0{,}02 + P(F) - 0{,}02 \times P(F)$

$0{,}98P(F) = 0{,}049$ soit $P(F) = \frac{0{,}049}{0{,}98} = 0{,}05$;

probabilité que l'appareil présente le défaut F est 0,05.

Ex4. *La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}6$.*
Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

1. Calculer la probabilité des événements A : "$X \leq 4$" et B : "$X < 8$"

$$P(A) = P(X \leq 4) \approx 0{,}1662$$

$$P(B) = P(X < 8) = P(X \leq 7) \approx 0{,}8327$$

2. Préciser l'événement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.

$$A \cap B = \{X \leq 4 \; et \; X < 8\} = \{X \leq 4\}$$

$$P(A \cap B) = P(X \leq 4) \approx 0{,}1662$$

3. Calculer $P_B(A)$; $P_{X>5}(X \leq 8)$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(X \leq 4)}{P(X \leq 7)} \approx 0{,}1996$$

$$P_{X>5}(X \leq 8) = \frac{P(6 \leq X \leq 8)}{P(X \geq 6)} = \frac{P(X \leq 8) - P(X \leq 5)}{1 - P(X \leq 5)} \approx 0{,}9268$$

BONUS. Un étudiant peu studieux, décide de répondre de façon aléatoire à un test composé d'un questionnaire à choix unique. Sachant que le QCU a 5 questions et 3 propositions pour chacune d'elles avec une unique bonne réponse, calculer la probabilité que l'étudiant réussisse le test, c'est-à-dire obtienne au moins 3 bonnes réponses.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses sur les 5.
On a une répétition de 5 épreuves de Bernoulli identique et indépendantes
donc X suit la loi binomiale de paramètres
$n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}20987\ldots \approx 0{,}210$