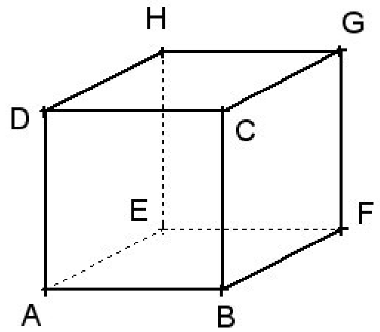
Devoir commun de Mathématiques n°2

Exercice 1 : (3,5 points)

$ABCDEFGH$ est un cube.

Pour chacune des propositions suivantes, entourer la ou les bonnes réponses. Aucune justification n'est demandée.

Chaque bonne réponse rapport 0,5 point.



		A	B	C	D
1	Les droites (AE) et (GC) sont :	parallèles	sécantes	coplanaires	non coplanaires
2	Les droites (AH) et (CH) sont :	parallèles	sécantes	coplanaires	non coplanaires
3	Les droites (BG) et (AF) sont :	parallèles	sécantes	coplanaires	non coplanaires
4	La droite (AG) est :	Parallèle au plan (BDF)	Incluse dans le plan (BDF)	Sécante avec le plan (BDF)	
5	Les plans (ACF) et (DEG) sont :	parallèles	confondus	sécants	
6	$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}=$	$\overrightarrow{BE}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BH}$	$\overrightarrow{FD}$
7	$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}=$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$	$\overrightarrow{BE}$	$\overrightarrow{DH}$	$\overrightarrow{CH}$

Exercice 2 : (2 points)

Soit un cube $ABCDEFGH$ et un plan (IJK) tel que :

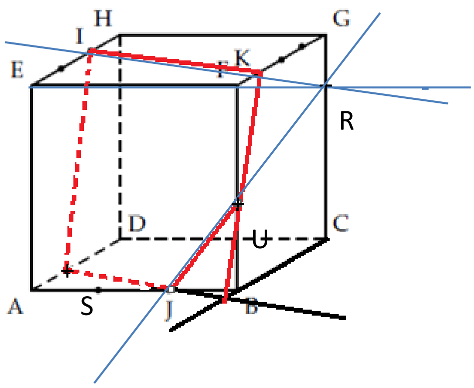
$\overrightarrow{EI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

Déterminer la section du cube par le plan (IJK) .

Vous prendrez soin de donner les étapes de votre construction.

1. On trace (IK) ;
2. On trace la parallèle d à (IK) passant par J ;
on obtient $S=(d)\cap(AD)$.
3. (SJ) coupe (BC) en T ; on obtient $U=(KT)\cap(BC)$

La section du cube par le plan (IJK) est le polygone IKUJS



Exercice 3 : (2 points)

$ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre.

I , J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AE]$, $[FG]$ et $[BF]$.

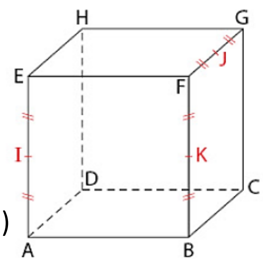
1. a. Justifier que $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IF}$.

$ABFE$ carré

donc $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$ et I milieu de [AE] donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ ①

et K milieu de [BF] donc $\overrightarrow{KF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ ②

de ① et ②, on en déduit : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{KF}$ et donc $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IF}$ (car $AIFK$ parallélogramme)



2. Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

3. En déduire la position relative de la droite (IJ) par rapport au plan (AKD).

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et $I \notin (AKD)$ donc la droite (IJ) est strictement parallèles au plan (AKD).

Exercice 4 : (7,5 points)

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentés ci-contre.

Le point O est le centre de la base $ABCD$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. a. Justifier que $\left(O\,;\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est un repère de l'espace.

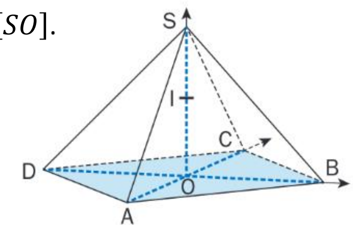
Les vecteurs $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, et $\overrightarrow{OS}$ ne sont pas coplanaires donc $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est une base de l'espace donc $\left(O\,;\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est un repère de l'espace.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans ce repère.

b. Donner toutes les coordonnées des points de la figure dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

$O\,(0\,;0\,;0)$; $B(1\,;0\,;0)$; $C\,(0\,;1\,;0)$;
$S\,(0\,;0\,;1)$; $D\,(-1\,;0\,;0)$; $A\,(0\,;-1\,;0)$

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.



a. Justifier que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{-1}{3}\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{SD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}\,;\ D\ \ (-1\,;0\,;0)\,;$$

$$K\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times(-1)+0\\ \frac{1}{3}\times 0+0\\ \frac{1}{3}\times(-1)+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

autre méthode :

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} \text{ donc } \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$$

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

$$I(0\,;0\,;0{,}5)\,;\ \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\0{,}5\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

On a : $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires donc les points B, I et K sont alignés.

3. On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Montrer que l'intersection des plans (BCI) et (SAD) est la droite (KL).

$L \in (SA)$ donc $L \in (SAD)$

$L \in (BCI)$ donc $L \in (SAD) \cap (BCI)$

$K \in (SD)$ donc $K \in (SAD)$

$K \in (BI)$ car B, K, I alignés donc $K \in (BCI)$

On en déduit : $K \in (SAD) \cap (BCI)$

On a deux points distincts K et L appartenant aux deux plans (SAD) et (BCI) donc

$(KL) = (SAD) \cap (BCI)$

BONUS. (0,5 pt) Montrer que les droites (KL) et (AD) sont parallèles.

$(AD)//(BC)$ avec $(AD) \subset (SAD)$ et $(BC) \subset (BCI)$

et $(KL) = (SAD) \cap (BCI)$

donc d'après le théorème du toit, $(KL)//(AD)$

On admet dans la suite que les droites (KL) et (AD) sont parallèles

4. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SA).

$$S(0\,;0\,;1\,)\,;A\,(\,0\,;\,-1\,;0\,)\,;\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix};\,(SA)\begin{cases}x=0\\y=-t-1 & t\in\mathbb{R}\\z=-t\end{cases}$$

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (KL).

$(KL)//(AD)$ donc $\overrightarrow{AD}$ vecteur directeur de (KL).

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};K\left(-\frac{1}{3};0\,;\frac{2}{3}\right)\;;\;(KL)\begin{cases}x=-t'-\frac{1}{3}\\y=t' & t'\in\mathbb{R}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$$

c. En déduire les coordonnées du point L .

Les coordonnées de L vérifient les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases}x=0\\y=-t-1\\z=-t\end{cases}\text{ et }\begin{cases}x=-t'-\frac{1}{3}\\y=t'\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$$

On obtient $L\left(\,-\frac{1}{3}\,;0\,;\,\frac{2}{3}\right)$

Exercice 5 : (4,5 points)

On se place dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace.

On donne les points $A(1\,;0\,;4)$, $B(2\,;3\,;0)$, $C(-1\,;2\,;0)$ et $D(7\,;6\,;-2)$ ainsi que la droite d définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4t \\ y = 8t + 3 \\ z = -t + \frac{1}{4} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, **justifier** si elle est vrai ou fausse.

1) Les points A, B et C définissent un unique plan. VRAI

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{-2} \neq \frac{3}{2}$

donc les points A, B et C définissent un unique plan.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas coplanaires. FAUX

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$

On cherche à savoir s'il existe des coefficients a et b tels que : $\overrightarrow{BD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

On résout le système : $\begin{cases} 5 = a - 2b \\ 3 = 3a + 2b \\ -2 = -4a - 4b \end{cases}$

Des deux premières équations on déduit que $a = 2$ et $b = -\frac{3}{2}$

Ce qui vérifie aussi la dernière équation : $-4 \times 2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -2$

Ainsi $\overrightarrow{BD}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs du plan (ABC),

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc coplanaires.

3) Les droites (AB) et d sont parallèles. FAUX .

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires $\left(\frac{4}{1} \neq \frac{8}{3}\right)$

les droites $(AB) et\ d$ ne sont donc pas parallèles.

4) Le point C appartient à la droite d. FAUX

$C \in (AB)$ s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} -1 = 4t \\ 2 = 8t + 3 \\ 0 = -t + \frac{1}{4} \end{cases}$

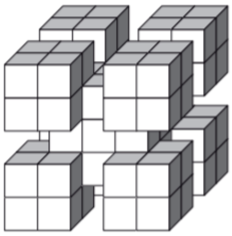
D'après la première équation on obtient : $t = -\frac{1}{4}$

Dans la seconde équation : $8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 = 1 \neq 2$; ce système n'a pas de solution

Donc le point C n'appartient pas à la droite d.

Questions bonus (0,5 pt) :

1) Le ruban cadeau qui entourait le gros cube était adhésif ! Tous les petits cubes qui étaient en contact avec lui sont restés collés lorsqu'il a été enlevé. Combien y a-t-il de petits cubes dans la structure restante ?



Dans la structure restante il y a :

$3^3 + 8 \times 7 = 83$ cubes.