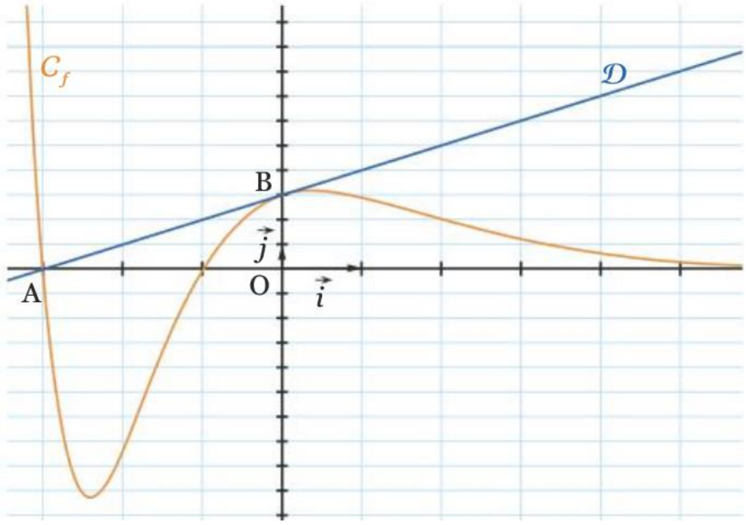
mathsbdp.fr dérivation convexité

Ex1.

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe représentative C_f de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



On admet que la droite $\mathcal{D}$ passe par A et est tangente à la courbe C_f au point B.

1. a. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B.
En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est $y=x+3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.

2. a. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x)=[-ax^2+(2a-b)x+b-c]e^{-x}$.

b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.

3. a. En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ b-c=1 \\ c=3 \end{cases}$$

b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x^2+4x+3)e^{-x}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x)=(-x^2-2x+1)e^{-x}$.

2. Pour tout réel x, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe C_f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

4. Déterminer $f''(x)$.

5. On admettra que $f''(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$

Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

6. La courbe de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier la réponse.

COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

Dérivée d'une composée
$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times (v' \circ u)(x_0)$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $(e^u)' = u'e^u$
- Si $u > 0$ alors $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si $u \neq 0$, alors $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Convexité

- Fonction convexe
  - La courbe est au-dessus de ses tangentes
  - f' est croissante
- Point d'inflexion
  - La courbe traverse ses tangentes
  - La fonction change de convexité

QCM réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

11 La fonction dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{5x+7} \times (2x^2+4x+6)$ est $x \mapsto ...$:

a $e^{5x+7}(2x^2+4x+6)+e^{5x+7}(4x+4)$
b $2(5x^2+12x+17)e^{5x+7}$
c $5e^{5x+7}(2x^2+4x+6)+e^{5x+7}(4x+4)$
d $5e^{5x+7}(4x+4)$

12 La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sqrt{x^2+1}$ est :

a croissante sur $\mathbb{R}$.
b croissante sur $[0 ; +\infty[$.
c convexe sur $[0 ; +\infty[$.
d convexe sur $\mathbb{R}$.

13 La fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x) = (x^2-5x+4)^2$:

a admet un point d'inflexion.
b admet deux points d'inflexion.
c admet trois tangentes horizontales.
d admet quatre tangentes horizontales.

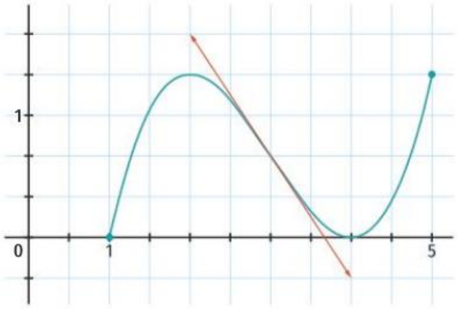
14 La fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = e^{x^2-2x+3}$:

a admet pour fonction dérivée $m' : x \mapsto 2(x-1)e^{x^2-2x+3}$.
b admet pour fonction dérivée $m' : x \mapsto e^{2x-2}$.
c est concave sur $\mathbb{R}$.
d est convexe sur $\mathbb{R}$.

QCM réponse unique

Pour les exercices 7 à 9

Soit g la fonction définie sur $[1 ; 5]$ dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



7 Que vaut $g'(3)$?

a $g'(3) = -3$
b $g'(3) = \dfrac{3}{2}$
c $g'(3) = -1$
d $g'(3) = -\dfrac{3}{2}$

8 La fonction g semble convexe sur l'intervalle :

a $[2 ; 4]$ b $[1 ; 3]$ c $[1 ; 2]$ d $[3 ; 5]$

9 On note g'' la dérivée de g'. On a alors :

a $g''(3) = 3$
b $g''(2) = 0$
c $g''(3) = 0$
d $g''(4) = 0$

10 La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3x^2+6x+4}$ est :

a $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+6x+4}}$
b $f' : x \mapsto \dfrac{6x+6}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$
c $f' : x \mapsto \dfrac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$
d $f' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$